

Так как любое фундаментальное представление⁵⁾ $T_{(f)} = T_{(1)}^{\wedge f}$ алгебры $sl(r+1, \mathbb{C})$ согласно утверждению 3.4.6 строится как подпредставление в прямом произведении f определяющих представлений $T_{(1)}$, а любое неприводимое конечномерное представление $T^{(\vec{n})}$ строится как подпредставление в прямом произведении (3.4.38) фундаментальных представлений $T_{(f)}$, то мы имеем еще одно важное утверждение, которое понадобится нам в следующей главе 4.

Утверждение 3.4.8. Любое конечномерное неприводимое представление $T^{(\vec{n})}$ алгебры $sl(r+1, \mathbb{C})$ со старшим весом (3.4.36) строится как подпредставление в прямом произведении $T_{(1)}^{\otimes n}$ определяющих представлений $T_{(1)}$ алгебры $sl(r+1, \mathbb{C})$, где степень n дается формулой

$$n = \sum_{f=1}^r f \cdot n_f; \text{ см. (3.4.37).}$$

◆ **Замечание 1.** Старший вес (3.4.36) неприводимого представления $T^{(\vec{n})}$ алгебры $sl(r+1, \mathbb{C})$ определяется набором целых чисел λ_i ($i = 1, \dots, r$), которые согласно (3.4.37) упорядочены $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r \geq 0$, а их сумма равна n . Набор $\Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_r]$ целых неотрицательных чисел с указанными свойствами называется *разбиением* числа n и обозначается как $\Lambda \vdash n$. Таким образом, каждому старшему весу $\lambda^{(\vec{n})} \in \Lambda^+$ алгебры $sl(r+1, \mathbb{C})$ (или неприводимому конечномерному представлению $T^{(\vec{n})}$ алгебры $sl(r+1, \mathbb{C})$) сопоставляется разбиение $\Lambda \vdash n$, или диаграмма Юнга $\Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_r]$ с n клетками, у которой первая строка состоит из λ_1 клеток, вторая — из λ_2 клеток и т. д., и последняя r -я строка состоит из λ_r клеток. Разбиения и диаграммы Юнга рассматривались нами при обсуждении группы перестановок в разделе 1.1.4 первой книги (см. также замечание 2 и разделы 4.3, 4.4 ниже). Целые числа $\lambda_k \geq 0$, определяющие вид диаграммы Юнга, и целые числа $n_f \geq 0$, фиксирующие старший вес (3.4.9) неприводимого представления $T^{(\vec{n})}$ алгебры $sl(r+1, \mathbb{C})$ (приписанные вершинам диаграммы Дынкина на рис. 3.6), связаны соотношениями (3.4.37). В частности для старших весов, равных фундаментальным весам $\lambda_{(f)}$, сравнивая (3.4.22) и (3.4.36),

⁵⁾ Мы используем терминологию, принятую в математической литературе, и называем фундаментальным представление, в котором старший вес является фундаментальным. В физической литературе фундаментальным называют только одно из фундаментальных представлений, а именно определяющее представление.

мы имеем

$$n_i = \delta_{if} \Leftrightarrow \Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_r] = \underbrace{[1, \dots, 1, 0, \dots, 0]}_f \equiv [1^f].$$

Таким образом, неприводимым представлениям $T_{(f)} = T_{(1)}^{\wedge f}$, старшие веса которых равны фундаментальным весам $\lambda_{(f)}$, и которые действуют в пространствах полностью антисимметричных тензоров (3.4.26) ранга f , сопоставляется диаграмма Юнга, состоящая из одного столбца высотой f :

$$T_{(f)} = T_{(1)}^{\wedge f} \quad \longleftrightarrow \quad [1^f] = \left. \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \vdots \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right\} f. \quad (3.4.42)$$

Клеткам диаграммы в правой части (3.4.42), начиная с верхней клетки, можно приписать индексы (i_1, \dots, i_f) антисимметричных компонент $\Psi_{(a)}^{i_1 \dots i_k}$ и считать, что получившаяся таблица соответствует полностью антисимметричным тензорам (3.4.26), пространство которых есть пространство неприводимого представления $T_{(1)}^{\wedge f}$.

◆ **Замечание 2.** Пространство $\mathcal{V}^{(\vec{n})}$ неприводимого представления $T^{(\vec{n})}$ алгебры $sl(r+1, \mathbb{C})$ со старшим весом (3.4.36), которое порождается из старшего вектора $|\vec{n}\rangle$ как линейная оболочка векторов (3.4.41), является пространством тензоров ранга $n = \sum_{f=1}^r f \cdot n_f$. Симметрия этих тензоров

(см. ниже раздел 4.4.1) определяется диаграммой Юнга $\Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_r]$ с $n = \sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i$ клетками. Поясним это утверждение.

Запишем тензорное произведение (3.4.38) в обратном порядке, и при этом воспользуемся графическим представлением (3.4.42). В результате получаем равенство, которое дано на рис. 3.7. Приводимое представление \bar{T} алгебры $sl(r+1, \mathbb{C})$, которое изображено на рис. 3.7, реализуется в пространстве тензоров Ψ ранга $n = \sum_f f \cdot n_f$. Приписывая индексы (i_1, \dots, i_n) компонент $\Psi^{i_1 \dots i_n}$ тензора Ψ клеткам диаграмм, изображенным в правой части рис. 3.7 (там имеется n_r столбцов высотой r , n_{r-1} столбцов высотой $(r-1)$ и т. д.), мы видим, что пространство $\bar{\mathcal{V}}$ представления \bar{T} образовано тензорами Ψ с компонентами $\Psi^{i_1 \dots i_n}$, обладающими

$$\bar{T} = T_{(r)}^{\otimes n_r} \otimes \dots \otimes T_{(2)}^{\otimes n_2} \otimes T_{(1)}^{\otimes n_1} = r \left\{ \begin{array}{c} \otimes n_r \\ \vdots \\ \otimes n_r \end{array} \right\} \otimes (r-1) \left\{ \begin{array}{c} \otimes n_{r-1} \\ \vdots \\ \otimes n_{r-1} \end{array} \right\} \otimes \dots \otimes \left\{ \begin{array}{c} \otimes n_2 \\ \vdots \\ \otimes n_2 \end{array} \right\} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \otimes n_1 \\ \vdots \\ \otimes n_1 \end{array} \right\}$$

Рис. 3.7. Графическое изображение для представления (3.4.38) алгебры Ли $sl(r+1, \mathbb{C})$

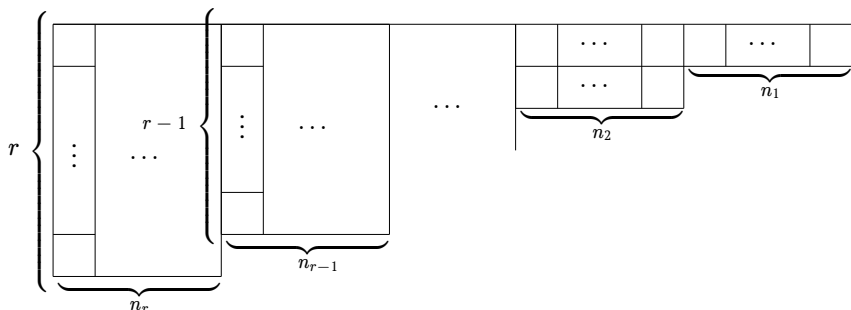


Рис. 3.8. Диаграмма Юнга Λ , состоящая из n_r столбцов высоты r , n_{r-1} столбцов высоты $(r-1)$ и так далее. У диаграммы Λ первая строка имеет длину $\lambda_1 = n_r + \dots + n_2 + n_1$, вторая строка имеет длину $\lambda_2 = n_r + \dots + n_2$ и так далее, до последней строки, которая имеет длину $\lambda_r = n_r$, то есть $\Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_r]$

определенной антисимметрией по перестановке индексов, а именно компоненты $\Psi^{i_1 \dots i_n}$ будут антисимметричны по перестановкам тех индексов, которые попали в один и тот же столбец в правой части рис. 3.7. При выделении из \bar{V} инвариантного подпространства неприводимого представления $T^{(\bar{n})}$, которое порождается из старшего вектора (тензора) (3.4.40) как линейная оболочка векторов (3.4.41), антисимметрия компонент тензоров Ψ по перестановкам индексов, располагающихся в столбцах, вообще говоря не сохранится, а действие операторов $T^{(\bar{n})}(E_\alpha)$ в (3.4.41) будет приводить к симметризации индексов компонент $\Psi^{i_1 \dots i_n}$, попавших в разные столбцы в правой части рис. 3.7. В результате диаграмма Юнга, определяющая указанную только что симметрию тензоров, которые образуют пространство неприводимого представления $T^{(\bar{n})}$, получается из рис. 3.7 склейкой столбцов, как это изображено на рис. 3.8. Получившаяся диаграмма Юнга $\Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_r]$ совпадает с диаграммой Юнга, о которой шла речь выше в замечании 1 (см. равенства (3.4.37)). Эта диаграмма опре-

дующим образом

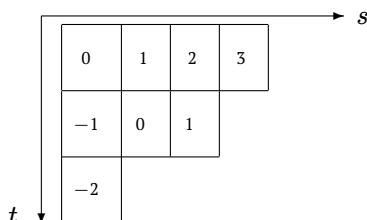
$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & A & & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right), \quad A \in \mathfrak{gl}(N-1, \mathbb{C}), \quad (4.7.3)$$

то есть, подалгебра $\mathfrak{gl}(N-1, \mathbb{C})$ натянута на образующие $E_{ij} \in \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$, у которых индексы пробегают значения $i, j = 1, \dots, (N-1)$. Неприводимое конечномерное представление $T^{(\lambda)}$ алгебры $\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$ является приводимым для подалгебры $\mathfrak{gl}(N-1, \mathbb{C})$ и разлагается в сумму ее неприводимых представлений $T^{(\lambda')}$, каждое из которых имеет размерность меньшую $\dim(T^{(\lambda)})$ и нумеруется своим старшим весом $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_{N-1})$, где компоненты упорядочены так же как и в (4.7.2): $\lambda'_1 \geq \dots \geq \lambda'_{N-1} \geq 0$. Вес λ' соответствует диаграмме Юнга $\Lambda' = [\lambda'_1, \dots, \lambda'_{N-1}]$ и определяет собственные значения (как функции от λ'_i) операторов Казимира для $\mathfrak{gl}(N-1, \mathbb{C})$. Операторы Казимира для $\mathfrak{gl}(N-1, \mathbb{C})$ коммутируют с операторами Казимира (и элементами подалгебры Картана) для $\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$ и поэтому мы можем использовать их собственные значения, а следовательно и значения компонент старшего веса $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_{N-1})$, для нумерации векторов в подпространствах $\mathcal{V}^{(\lambda')} \subset \mathcal{V}^{(\lambda)}$ представлений $T^{(\lambda')}$ наряду со значениями компонент старшего веса $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$. Далее, вспомним рассуждения, которые использовались в разделе 4.4.2 для формулировки первого способа вычисления размерностей представлений группы $SL(N, \mathbb{C})$, который основывался на вложении представлений подгруппы $SL(N-1, \mathbb{C})$ в представления группы $SL(N, \mathbb{C})$. Эти рассуждения в полной мере применимы и к описанию вложений представлений алгебры $\mathfrak{gl}(N-1, \mathbb{C})$ в представления алгебры $\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$. В результате мы приходим к тому, что представление $T^{(\lambda')}$ алгебры $\mathfrak{gl}(N-1, \mathbb{C})$, соответствующее диаграмме Юнга $\Lambda' = [\lambda'_1, \dots, \lambda'_{N-1}]$, может входить в разложение представления $T^{(\lambda)}$ алгебры $\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$, соответствующее диаграмме Юнга $\Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}]$, только если выполнено условие

тогональных идемпотентов в алгебре $\mathcal{B}r_n$. При этом все спектральные наборы обладают свойствами, перечисленными в теореме 5.2.6.

5.2.3. Осциллирующие таблицы Юнга и их вектора содержаний

Пусть (s, t) — координаты клетки в диаграмме Юнга λ . Напомним (см. раздел 4.6.2), что клетке (s, t) диаграммы λ мы приписываем число $(s - t)$, которое называется *содержанием*. В качестве примера приведем диаграмму $[4, 3, 1]$ с проставленными в клетках содержаниями:



Рассмотрим теперь последовательность диаграмм Юнга $\Lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, которая начинается с тривиальной диаграммы $\lambda_0 = \emptyset$, а $(k + 1)$ -я диаграмма λ_{k+1} , стоящая в последовательности Λ после диаграммы λ_k , получается либо добавлением одной клетки во внешние углы диаграммы λ_k , либо удалением одной клетки из внутреннего угла диаграммы λ_k (см. пример на рис. 5.5). Напомним, что такая последовательность диаграмм Юнга Λ называется осциллирующей таблицей Юнга, см. раздел 5.1.4. Пример осциллирующей таблицы Юнга приведен в (5.1.49).

Определим содержание добавленной или удаленной клетки (s, t) диаграммы λ_k как $(s - t)$, если клетка добавлена, или $1 - \omega - (s - t)$, если клетка удалена. На рисунке 5.5 содержание добавленной и удаленной клеток указаны в качестве индексов на стрелках. Итак, каждой осциллирующей таблице Юнга соответствует последовательность переходов между диаграммами Юнга

$$\Lambda = \{\emptyset \xrightarrow{a_1=0} \lambda_1 \xrightarrow{a_2} \lambda_2 \xrightarrow{a_3} \lambda_3 \xrightarrow{a_4} \dots \xrightarrow{a_n} \lambda_n\} \quad (5.2.36)$$

где каждому переходу $\lambda_{k-1} \rightarrow \lambda_k$ приписывается содержание a_k добавленной или удаленной клетки у диаграммы λ_{k-1} . Таким образом, каждой осциллирующей таблице Юнга Λ длины n соответствует **вектор содержаний** длины n

$$\Lambda = (a_1, a_2, \dots, a_n),$$

диаграмма расположена (уровни графа считаются сверху, и нумерация начинается с 0). Вершина $\{\lambda; k\}$ графа соответствует неприводимому представлению $\rho^{\{\lambda; k\}}$ алгебры $\mathcal{B}r_k$. Например, каждая вершина $\{\lambda; 4\}$ на самом низком уровне графа рис. 5.6 соответствует неприводимому представлению $\rho^{\{\lambda; 4\}}$ алгебры $\mathcal{B}r_4$ (мы обсудим это подробнее чуть ниже). Пути, идущие из верхней вершины \emptyset , расположенной на уровне 0, до нижнего уровня (в рассматриваемом случае это пути длины 4) сопоставляются осциллирующим таблицам Юнга (5.2.36), которые в свою очередь соответствуют спектральным наборам $\Lambda = (a_1, \dots, a_n)$. Например, один из трех путей, идущих из верхней вершины $\{\emptyset; 0\}$ до вершины $\{\emptyset; 4\}$ на четвертом уровне, дается осциллирующей таблицей $\Lambda = \{\emptyset \xrightarrow{a_1=0} [1] \xrightarrow{a_2=-1} [1^2] \xrightarrow{a_3=+1'} \xrightarrow{a_4=+1'} [1] \xrightarrow{a_4=0'} \emptyset\}$ или спектральным набором $\Lambda = (0, -1, 2 - \omega, 1 - \omega)$. Таким образом, все пути в осциллирующем графе Юнга соответствуют примитивным идемпотентам $e_\Lambda \in \mathcal{B}r_4$ — собственным векторам элементов Юциса—Мерфи (y_1, \dots, y_4) с собственными значениями $\Lambda = (a_1, a_2, a_3, a_4)$. Собственные значения (a_1, a_2, a_3, a_4) указаны на ребрах путей и равны содержаниям добавленных или удаленных клеток у диаграмм Юнга, через которые проходит данный путь. Каждый примитивный идемпотент e_Λ при действии на него слева (справа) всей алгеброй $\mathcal{B}r_4$ порождает (см. раздел 4.5.1) в регулярном представлении неприводимое подпредставление в пространстве левого идеала \mathcal{L}_Λ (правого идеала \mathcal{R}_Λ). Поэтому каждый путь Λ в осциллирующем графе Юнга, заканчивающийся в вершине $\{\lambda; 4\}$, ассоциируется с неприводимым представлением алгебры $\mathcal{B}r_4$ в пространстве \mathcal{L}_Λ , которое мы обозначаем $\rho^{\{\lambda; 4\}}$. При этом разные пути, которые нумеруются разными наборами Λ_i , но заканчиваются в одной и той же вершине $\{\lambda; 4\}$, соответствуют различным идемпотентам, а, следовательно, различным, но эквивалентным представлениям $\rho^{\{\lambda; 4\}}$, действующим в изоморфных пространствах \mathcal{L}_{Λ_i} . Это следует из общего рассмотрения полупростых ассоциативных алгебр в разделе 4.5.1 (см., в частности, замечание 3 из указанного раздела). Итак, неприводимые представления алгебры $\mathcal{B}r_k$ нумеруются вершинами $\{\lambda; k\}$ в осциллирующем графе Юнга, при этом кратность вхождения представления $\rho^{\{\lambda; 4\}}$ в регулярное представление равна числу путей, ведущих к вершине $\{\lambda; k\}$. С другой стороны, в соответствии с дуальностью, обсуждавшейся в замечании 3 из раздела 4.5.1, разные пути, заканчивающиеся в одной и той же вершине $\{\lambda; 4\}$ и ассоциированные с примитивными идемпотентами e_{Λ_i}