ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н. Ю. Энатская, Е. Р. Хакимуллин

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА ДЛЯ ИНЖЕНЕРНО-ТЕХНИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ

УЧЕБНИК И ПРАКТИКУМ
ДЛЯ ПРИКЛАДНОГО БАКАЛАВРИАТА

Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по инженерно-техническим направлениям и специальностям

Книга доступна в электронной библиотечной системе
biblio-online.ru

Москва • Юрайт • 2015

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171я73
Э61

***Авторы*:**

Энатская Наталия Юрьевна — кандидат физико-математических наук, профессор общеинститутской кафедры высшей математики Московского института электроники и математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»;

Хакимуллин Евгений Робертович — доцент, кандидат физико-математических наук, профессор общеинститутской кафедры высшей математики, профессор кафедры компьютерной безопасности факультета прикладной математики и кибернетики Московского института электроники и математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики».

***Рецензенты*:**

Ивченко Г. И. — доктор физико-математических наук, профессор общеинститутской кафедры высшей математики Московского института электроники и математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»;

Колчин В. Ф. — доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Энатская, Н. Ю.

Э61 Теория вероятностей и математическая статистика для инженерно-технических направлений : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / Н. Ю. Энатская, Е. Р. Хакимуллин. — М. : Издательство Юрайт, 2015. — 399 с. — Серия : Бакалавр. Прикладной курс.

ISBN 978-5-9916-4176-0

Учебник представляет три вероятностные дисциплины: теорию вероятностей, математическую статистику и случайные процессы, составляющие основу вероятностного образования студентов. По каждой дисциплине изложены основные теоретические вопросы и приведены многочисленные примеры и задачи для иллюстрации теории и пояснения ее практического использования. Кроме решенных задач по всем главам учебника предложены задачи для самостоятельного решения и теоретические вопросы для самоконтроля понимания материала.

Учебник соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования.

Для студентов инженерно-технических специальностей.

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171я73

ISBN 978-5-9916-4176-0

Оглавление

Предисловие

В математической подготовке студентов инженерно-технических специальностей все большее место занимают вероятностные дисциплины, главными из которых являются теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы. Они и являются предметом рассмотрения настоящего учебника. Он прошел практическую апробацию и написан на основе читаемых авторами на протяжении многих лет одноименных курсов в Московском институте электроники и математики, Высшей школе экономики, Московском государственном университете (на механико-математическом факультете), Московском авиационно-технологическом институте и др. Представленные в учебнике дисциплины дают студентам ориентацию при решении многих практических задач ряда направлений, составляют начальный уровень для получения более широкого и глубокого образования в области теории вероятностей.

Включенный в учебник материал полностью соответствует программе подготовки студентов инженерно-технических специальностей и приводится на доступном уровне, требующем для понимания математических основ начальных курсов вузов, таких как классический математический анализ и элементы линейной алгебры.

Цель учебника — в доступной форме познакомить студентов с основными направлениями современных вероятностных дисциплин и привить навыки использования вероятностных и статистических методов при решении конкретных теоретических и практических задач. В силу естественной ограниченности объема учебника в рамках учебных стандартов вузов изложение материала требует сочетания компактности, доказательности, логической связности и доступности понимания основных вероятностных дисциплин с достаточной полнотой для формирования целостного представления о них. Это диктует логику выбора обсуждаемых тем и степень подробности их представления. В связи с этим обстоятельством в учебнике опущены некоторые сложные для понимания или громоздкие доказательства отдельных принципиально важных фактов теории, при этом авторы ограничивались их качественными комментариями.

Структура учебника определяется выбором обсуждаемых основных трех указанных выше вероятностных дисциплин в форме трех разделов с соответствующими им названиями.

Первый раздел знакомит с основами теории вероятностей и требует для своего понимания лишь начального математического образования студентов, в то время как для восприятия второго и третьего разделов, соответственно рассматривающих вопросы математической статистики и случайных процессов, необходимо достаточно хорошее освоение первого раздела.

Главным принципом изложения материала является его понятность («лучше меньше, да лучше»), поэтому в ходе обсуждения подробно комментируются связи между различными понятиями и приводятся многочисленные примеры и задачи с решениями и для самостоятельного разбора. Это неизбежно приводит к необходимости исключения из рассмотрения некоторых тем, например таких как случайные векторы и множественная регрессия, или теоретически сложных и громоздких доказательств отдельных важных факторов теории, а также к упоминанию некоторых необходимых сведений, не являющихся основными, без достаточного их обсуждения — в виде справочных материалов. Такая форма подачи информации по выбранным вероятностным дисциплинам соответствует реальным возможностям лектора в рамках учебного аудиторного времени.

В конце учебника приводится большое число задач для самостоятельного решения в соответствии с его частями и главами, которые можно также включать в семинарские занятия и домашние задания. Основная часть этих задач — авторские, отдельные задачи взяты из работ [3, 6, 20].

При освоении курсов учебника рекомендуется использование пакета компьютерных программ «Статистика», обсужденного в приложении к учебнику.

В результате изучения материалов данного учебника студенты должны:

знать

- основные формулы для вероятностей случайных событий;
- основные вероятностные распределения и их числовые характеристики;
- предельные теоремы теории вероятностей;
- параметрическую и непараметрическую задачи статистики;
- основы проверки статистических гипотез;
- основы теории случайных процессов;
- понятия марковских, пуассоновских, ветвящихся процессов и их числовые характеристики;

уметь

- решать задачи по теории вероятностей;
- решать задачи математической статистики;
- решать задачи теории случайных процессов;
- применять марковские процессы в теории массового обслуживания;

владеть

- методами теории вероятностей для решения конкретных задач;
- методами математической статистики для решения задач проверки статистических критериев;
- методами оценивания параметров распределений и сравнения качества оценок;
- методами анализа случайных процессов.

Кроме основной функции использования в учебном процессе при проведении основных вероятностных курсов для студентов втузов подготовки на прикладном бакалавриате учебник может быть полезен для формирования спецкурсов, проведения индивидуальной работы со студентами самообразования, а также для всех лиц, применяющих вероятностные и статические методы при решении практических задач.

Основные обозначения

СВ — случайная величина;
ч.т.д. — что и требовалось доказать;
нз — независимые;
нк — некоррелированные;
MX — математическое ожидание СВ X;
DX — дисперсия СВ X;
K_{XY} — корреляция СВ X и Y;
r_{XY} — коэффициент корреляции СВ X и Y;
СВ $X \sim L(a)$ — означает, что СВ X имеет закон распределения $L(a)$, где $a = (a_1, ..., a_k)$ — k-мерный параметр распределения;
СВ $X \sim B(1, p)$ — бернуллиевское распределение;
СВ $X \sim B(n, p)$ — биномиальное распределение;
СВ $X \sim \pi(\lambda)$ — пуассоновское распределение;
СВ $X_i \sim G(p)$ — геометрическое распределение;
СВ $Y_i \sim$ сд$G(p)$ — сдвинутое геометрическое распределение;
СВ $Z_1 \sim$ Па(r, p) — распределение Паскаля;
СВ $Z_2 \sim OB(r, p)$ — отрицательное биномиальное распределение;
СВ $X \sim H(N, M, n)$ — гипергеометрическое распределение;
СВ $X \sim R[a; b]$ — равномерное распределение на отрезке $[a; b]$;
СВ $X_0 \sim R[0; 1]$ — равномерное распределение на отрезке $[0; 1]$;
СВ $X \sim N(a, \sigma)$ — нормальное распределение с параметрами (a, σ);
СВ $X_0 \sim N(0, 1)$ — нормальное распределение с параметрами $(0, 1)$;
СВ $X \sim \Gamma_{\alpha, \lambda}$ — гамма-распределение;
СВ $X \sim E(\lambda)$ — экспоненциальное распределение.

Раздел I

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В результате изучения данного раздела студенты должны:

знать

• основные формулы для вероятностей случайных событий;

• основные вероятностные распределения и их числовые характеристики;

• предельные теоремы теории вероятностей;

уметь

• решать задачи по теории вероятностей;

владеть

• методами теории вероятностей для решения конкретных задач.

Теория вероятностей лежит в основе многих математических дисциплин, таких как математическая статистика, теория надежности, теория массового обслуживания, статистическая физика и т.д., а ее методы находят широкое применение в различных областях науки и техники. Поэтому предмет теории вероятностей является обязательной составляющей математического образования выпускников вузов.

Глава 1
ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОБЫТИЙ

В результате изучения данной главы студенты должны:

знать

• свойства операций над событиями;

• основные формулы для вероятностей событий;

уметь

• решать задачи нахождения вероятностей случайных событий;

владеть

• навыками анализа связей событий и их вероятностей.

Основным предметом исследования теории вероятностей является понятие «событие» (или «явление», или «исход эксперимента»). Поэтому цель настоящей главы — знакомство с этим понятием, не совсем привычным или новым для студентов инженерно-технических специальностей 2—3-х курсов и требующим отдельного обсуждения. Главная трудность в математическом восприятии этого понятия состоит в способе установления соответствия между событием и его числовой мерой, являющейся в нашем курсе вероятностью события. Для этого вводится понятие вероятностного пространства, описывающего все исходы рассматриваемых опытов с соответствующей мерой этих исходов, называемых их вероятностями. Специфика этой вероятностной меры задается аксиоматически и является основой всех дальнейших рассмотрений.

Для изучения случайных событий, т.е. исходов опытов, которые могут меняться от случая к случаю, определяются операции над ними с их свойствами. Оказывается, что операции над событиями математически эквивалентны соответствующим операциям над множествами, которые известны студентам из начального курса высшей математики.

Далее в главе случайные события изучаются на основании понятия вероятностного пространства по моделям рассматриваемых опытов, которые упрощенно и адекватно должны описывать реальные процессы.

Для вычисления вероятностей событий подробно выводятся основные формулы с комментариями и примерами их применения.

Материалы этой главы дают базовые знания, необходимые для дальнейшего изучения теории вероятностей и других вероятностных дисциплин.

1.1. Становление теории вероятностей

Возникновение теории вероятностей относится к XVII в. и связано с комбинаторными задачами азартных игр. Именно потребности азартных игр привели к задачам, не решаемым известными к тому времени математическими методами, и тем самым стимулировали появление новых понятий, подходов и идей. Этот период зарождения теории вероятностей связан с именами таких известных математиков, как Д. Бернулли, П.-С. Лаплас, К. Ф. Гаусс и др.

В конце XIX — начале XX в. к теории вероятностей проявлялся повышенный интерес в связи с нуждами естествознания. Это привело к становлению теории вероятностей как самостоятельного, полноправного раздела математики. До настоящего времени интерес к теории вероятностей не ослабевает, о чем свидетельствуют интенсивные научные исследования в этой области.

Название предмета «Теория вероятностей» звучит для непосвященных парадоксально, так как понятие «теория» связывается с наукой, которая изучает закономерности, а слово «вероятность» означает неопределенность, случайность. Попробуем объяснить правомерность такого названия.

На практике мы часто сталкиваемся с так называемыми массовыми случайными явлениями (событиями), которые могут появляться или не появляться при многократном воспроизведении одного и того же опыта и протекают по-разному, например при бросании монеты или игральной кости — выпадение той или другой стороны монеты или грани на кости. Неоднозначность (непредсказуемость) исхода опыта часто связана с тем, что при сохранении основных его условий второстепенные изменяются и суммарно влияют на исход опыта. Таким образом, понятие случайности в этих ситуациях возникает в связи с трудностью или невозможностью учесть влияние второстепенных факторов на результирующее событие.

Иногда же понятие «случайность» отражает физическую природу изучаемого явления (например, хаотического движения элементарных частиц).

Однако оказывается возможным изучать общие закономерности случайных явлений независимо от их конкретной природы. Так, замечено, что при большом числе опытов относительная частота интересующего нас случайного события A (отношения появления события A к числу проведенных опытов) обладает статистической устойчивостью, т.е. относительная частота события A (при многократном повторении больших серий опытов) колеблется около одного и того же числа $P(A)$, которое характеризует данное событие A. Это число $P(A)$ дает количественную оценку влияния случая на исход A эксперимента и в соответствующей математической модели называется вероятностью события A (это статистическое определение вероятности события A). Устойчивость частот — это объективное свойство массовых, случайных явлений реального мира. Отсутствие устойчивости частот в сериях испытаний свидетельствует об изменениях основных условий опыта и не является объектом, интересующим теорию вероятностей. Другие закономерности случайных исходов не столь очевидны и являются предметом изучения теории вероятностей.

Таким образом, теория вероятностей занимается изучением закономерностей случайных явлений для получения количественной оценки влияния случая на исход эксперимента, а также обоснованием математических методов обработки результатов наблюдения.

Теория вероятностей имеет дело не с самими явлениями, а с упрощающими эти явления математическими моделями, в которых должны быть сохранены существенные стороны явлений, а несущественные — отброшены. При этом надо иметь в виду, что неоправданное упрощение или усложнение модели может привести к нежелательным последствиям: упрощение — к грубым или неверным выводам, а усложнение — к трудностям или невозможности исследования.

Судить о качестве модели следует по ее соответствию практическим результатам.

1.2. Операции над событиями

Математические вероятностные модели случайных явлений исследуются на основании понятия вероятностного пространства, т.е. тройки объектов $\{\Omega, A, P\}$ или $\{U, A, P\}$. Объясним эти объекты, предварительно обсудив смысл операций над событиями и дав необходимые определения.

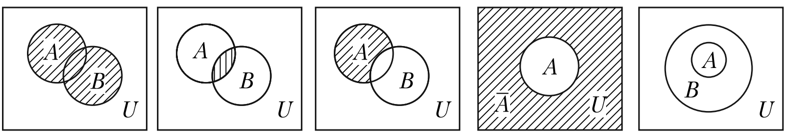
Определение 1.1. Назовем событие ***достоверным***, если оно происходит при каждом повторении опыта (обозначается обычно буквами U, E или Ω).

Определение 1.2. Назовем событие ***невозможным***, если оно никогда не происходит (обозначается значками V или $\varnothing$).

Определение 1.3. События ***совместны***, если они могут появиться одновременно в одном опыте, и ***несовместны*** — в противном случае.

При рассмотрении операций над событиями оказывается, что при соответствующей интерпретации операции над событиями аналогичны операциям над множествами. А именно: пусть точка бросается в некоторую область достоверного события. Будем считать, что происходит событие A, если точка попадает в подмножество A. Тогда будем считать, что происходят события $A + B$, $A \cdot B$ и $A - B$, если точка, брошенная в Ω, попадет в соответствующие подмножества $A + B$, $A \cdot B$ и $A - B$. При таком понимании смысла операций над событиями они сводятся к соответствующим операциям над множествами, которые известны из курса математического анализа. Теперь более подробно и последовательно обсудим конкретно с вышеизложенных позиций операции над событиями.

1. Операция сложения: происходит событие $A + B = A \cup B$, если точка, брошенная в область достоверного события U, попадает в заштрихованное множество $A + B$ (рис. 1.1, *а*). Вообще (в случае любого числа слагаемых) происходит сумма событий, если происходит хотя бы одно из них.



а *б* *в* *г* *д*

Рис. 1.1. **Соответствие операций над событиями операциям над множествами. Операции:**

а — сложения; *б* — умножения; *в* — вычитания; *г* — дополнения; *д* — влечения

2. Операция умножения: происходит событие $AB = A \cap B$, если точка, брошенная в область достоверного события U, попадает в заштрихованное множество (рис. 1.1, *б*). Вообще (в случае любого числа сомножителей) происходит произведение событий, если происходят все события.

3. Операция вычитания: происходит событие $A - B = A \setminus B$, если точка, брошенная в область достоверного события U, попадает в заштрихованное множество (рис. 1.1, *в*). Происходит событие $A - B$, если происходит событие A, но не происходит событие B.

4. Операция дополнения: происходит событие A, если точка, брошенная в область достоверного события U, попадает в заштрихованное множество (рис. 1.1, *г*). Происходит событие $\bar{A}$, если не