В. А. Малугин

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДЛЯ ЭКОНОМИЧЕСКОГО БАКАЛАВРИАТА

УЧЕБНИК И ПРАКТИКУМ

*Допущено УМО
по классическому университетскому образованию
в качестве учебного пособия для студентов
высших учебных заведений, обучающихся
по направлению 080100 «Экономика»*

**Книга доступна в электронной библиотечной системе
biblio-online.ru**

Москва ▪ Юрайт ▪ 2015

УДК 51
ББК 22.161.я73
М18

***Автор*:**

Малугин Виталий Александрович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математических методов анализа экономики экономического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова.

Малугин, В. А.

М18 Математический анализ для экономического бакалавриата : учебник и практикум / В. А. Малугин. — 3-е изд., перераб. и доп.— М. : Издательство Юрайт, 2015. — 557 с. — Серия : Бакалавр. Базовый курс.

ISBN 978-5-9916-2406-0

В учебнике рассмотрены основные идеи дифференциального и интегрального исчисления, а также классические методы оптимизации. Его цель — в доступной форме рассмотреть важные разделы математического анализа и их применение при решении широкого круга различных задач. Изложение сопровождается многочисленными примерами и поясняющими рисунками. Большинство глав заканчивается задачами, предлагаемыми для самостоятельного решения, ответы к которым приведены в конце книги.

Соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования третьего поколения.

Учебник для студентов экономических направлений и может быть полезен преподавателям при организации учебного процесса, включая проведение семинарских занятий, а также для практических работников, проходящих переподготовку.

УДК 51
ББК 22.161я73

ISBN 978-5-9916-2406-0

Оглавление

Предисловие

Естественнонаучные дисциплины давно развиваются при активном использовании все более усложняющегося и изощренного математического аппарата, а в последние 50—100 лет к его освоению приступили и ряд гуманитарных наук, например экономика, социология, филология и др. Так, во второй половине XX в. все нобелевские премии по экономике были получены за результаты, полученные с применением математических методов. В данном учебнике сделан акцент на те разделы математики, в частности математического анализа, которые в первую очередь понадобятся будущим экономистам.

Математический анализ, как и в целом математика, оперирует величинами. Это одно из основных понятий, которое настолько всеобъемлющее, что ему трудно дать точное определение. Характерное свойство величины заключается в том, что она может быть измерена, т.е. тем или иным путем сравнена с некоторой определенной величиной того же рода, которая принимается за единицу меры. Процесс сравнения зависит от свойств исследуемой величины и называется *измерением*. Любой закон природы предлагает соотношение между числами, которые выражают величины.

За последние годы многие понятия, воспринимавшиеся лишь качественно, например эффективность, информация, правдоподобие, «повышены в должностях» и переведены в разряд величин, т.е. объектов, подлежащих изучению математическими методами.

Под *математическим анализом* будем понимать логичные рассуждения, приводящие к установлению истины, с использованием теорем и выводимых на их основе формул (количественных соотношений). Рассмотрен его математический инструментарий и применение при исследовании экономических объектов и связей между ними.

Особенности преподавания математического анализа для будущих экономистов предполагают выделение, т.е. более подробное изучение, отдельных разделов, которые находят широкое и продуктивное применение в экономике. Другие разделы освещаются в той мере, которая необходима будущим бакалаврам для восприятия математического анализа как целостной науки, опирающейся на тщательно разработанный теоретический фундамент. Поэтому в дальнейшем они, используя приобретенные знания, умения, навыки и компетенции, смогут эффективно решать разнообразные задачи в рамках избранной профессии и осваивать усложняющийся математический аппарат.

Учебник написан по курсу «Математический анализ» и направлению «Экономика» в соответствии с Федеральным государственным стандартом высшего профессионального образования на основе материалов лекций и семинаров, которые проводились на первом курсе экономического факультета МГУ. Основной упор в нем сделан на самостоятельную работу.

Символами ◀ и ▶ в учебнике обозначаются соответственно начало и конец доказательств основных утверждений и теорем.

Глава 1
ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

Каждый изучивший данную главу должен:

знать декартову и полярную системы координат, основные свойства функций, основные элементарные функции;

уметь строить элементарные функции в декартовой системе координат, используя основные свойства функций, преобразовывать графики элементарных функций;

владеть навыками работы с функциями одной переменной, основными методами построения графиков простых элементарных функций.

Определение функции

Постоянной величиной называется величина, сохраняющая одно и то же значение. Переменной называется величина, которая может принимать различные числовые значения. Если каждому значению переменной x из множества X ставится в соответствие одно вполне определенное значение другой величины y из множества Y, то величина y называется *функцией величины* x и обозначается $y = f(x)$. При этом величина x называется *независимой переменной* (*аргументом*), величина y — *зависимой переменной* (*функцией*).

Способы задания функций

Существует несколько способов задания функции.

1. Аналитический способ. Функция задается формулой вида $y = f(x)$.

2. Табличный способ. Функция задается таблицей, содержащей значения аргумента и соответствующие им значения функции.

3. Графический способ. На координатной плоскости изображается совокупность точек.

Положение каждой точки на плоскости можно определить с помощью декартовой или полярной систем координат.

Декартова система координат

На плоскости строятся две взаимно перпендикулярные прямые — оси (например, горизонтальная (OX) — абсцисса и вертикальная (OY) — ордината), которые масштабируются (рис. 1.1). Начальной точкой отсчета (нулем) является точка пересечения прямых. Направо и вверх по осям откладываются положительные значения, налево и вниз — отрицательные. Каждой точке M на координатной плоскости соответствует пара значений переменных (x, y) и обратно: каждой такой паре соответствует на плоскости одна точка. Совокупность этих точек представляет собой график функции.

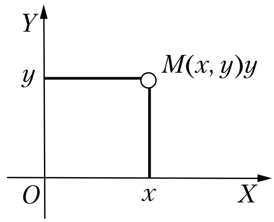

Рис. 1.1

Полярная система координат

На плоскости берется произвольная точка O — полюс. Из него выходит полупрямая — полярная ось. Каждой точке M на плоскости ставится в соответствие число ρ $(\rho \geq 0)$, выражающее расстояние точки M от полюса, и число φ $(0 \leq \varphi < 2\pi)$ — величина угла, образованного отрезком OM с полярной осью. Это соответствие, как и в случае с декартовой системой координат при условии $(0 \leq \varphi < 2\pi)$, является взаимно-однозначным. Положительным направлением отсчета угла φ считается проводимое против часовой стрелки. Числа ρ и φ называются *полярными координатами точки M* (рис. 1.2). Уравнение $\rho = f(\varphi)$ в полярной системе координат определяет некоторую линию.

Легко установить связь между полярными и прямоугольными декартовыми координатами. Пусть начало прямоугольной системы координат совпадает с полюсом,

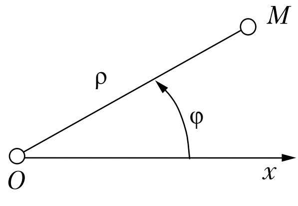

Рис. 1.2

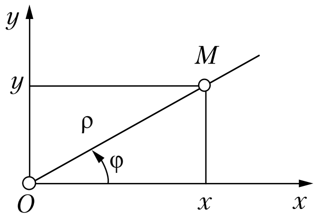

Рис. 1.3

а положительное направление оси Ox — с полярной осью. Из рис. 1.3 непосредственно следует

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi \text{ и обратно:}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}(y/x).$$

Пример 1. Построить график функции $\rho = \varphi$.

Решение. Составим таблицу значений (φ, ρ), записывая аргумент φ в радианах, функцию ρ — в виде десятичной дроби:

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ρ	0	0,79	1,57	2,35	3,14	4,71	6,28

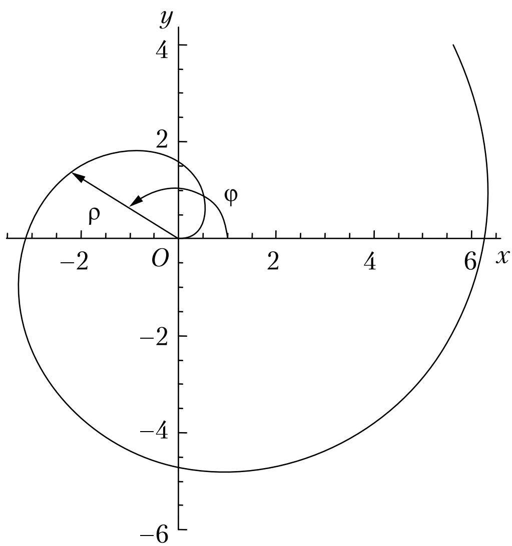

Рис. 1.4

Поворачивая радиус-вектор ρ на угол φ, строим график по точкам (рис. 1.4).

Формы задания функций

Функция называется *явной*, если она задана формулой, в которой правая часть не содержит зависимой переменной, например $y = x^2 + 5x - 6$.

Функция y аргумента x называется неявной, если она задана уравнением $F(x, y) = 0$, не разрешенным относительно зависимой переменной. Например, $x \ln x + y \sin y = 0$.

Обратная функция. Пусть между переменными x и y, заданными уравнением $y = f(x)$, существует взаимно-однозначное соответствие. Рассмотрим для примера функцию $y = 2x - 1$. Выразив в этом уравнении переменную x через y, получим $x = \dfrac{y+1}{2}$.

Оба уравнения описывают одну совокупность точек на координатной плоскости. Связь между переменными одна и та же, различие лишь в форме записи. Эту функцию x от аргумента y называют *обратной* по отношению к исходной. В последнем уравнении задается значение переменной y, вычисляется значение переменной x. Обозначим независимую переменную через x, зависимую переменную через y и перепишем наше уравнение в виде

$$y = \frac{x+1}{2}.$$

В дальнейшем под обратной будем подразумевать именно эту функцию.

В общем виде, имея $y = f(x)$, можем выразить x через y, введя специальное обозначение arc, т.е. $x = \operatorname{arc} f(y)$. Это другая форма записи исходной функциональной зависимости. Поменяем переменные: $y = \operatorname{arc} f(x)$. Перед нами обратная функция. Обратную функцию обозначают также в виде $y = f^{-1}(x)$. Можно доказать, что для любой строго монотонной функции существует обратная функция. Графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Сложная функция. Пусть функция $y = f(u)$ — функция от переменной u, определенной на множестве U с областью значений Y, а переменная u, в свою очередь, является функцией $u = \varphi(x)$ от переменной x, определенной на множестве X с областью значений U. Тогда заданная на множестве X функция $y = f[\varphi(x)]$ называется *сложной* функцией аргумента x. Например, $y = \ln \cos x$ — сложная функция.

Параметрическая функция. Если переменные x и y связаны через третью переменную t, то функция задана *параметрически*. Например, $\begin{cases} x = 0,3t \\ y = 2t \end{cases}$.

Функция, заданная в полярных координатах. Например, $r = \dfrac{2}{\varphi}$.

Основные свойства функций

1. Область определения (допустимых значений) аргумента. Множество X, на котором задана переменная x, называется *областью определения функции* (*допустимых значений*) аргумента (ОДЗ). В частном случае это может быть отрезок $[a, b]$, т.е. $a \le x \le b$, или интервал (a, b), т.е. $a < x < b$.

2. Область изменения (область значений) функции. Соответствующая всем возможным значениям аргумента совокупность значений функции называется *областью изменения функции*.

3. Корни (нули) функции. *Корнями функции* называются значения аргумента, при которых функция обращается в нуль.

4. Четность. Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если для любых значений x из области определения справедливо соотношение $f(-x) = f(x)$, и нечетной, если $f(-x) = -f(x)$. В противном случае функция $y = f(x)$называется *функцией общего вида*. График четной функции симметричен относительно оси ординат, нечетной — относительно начала координат.

5. Периодичность. Функция называется *периодической*, если существуют такие постоянные числа, при прибавлении которых к аргументу значение функции не изменяется. Наименьшее положительное из этих чисел называется *периодом*. Например, значение функции $y = \sin x$ не изменится, если к аргументу прибавлять любое число из множества $\{2\pi n\}$, где $n \in Z$. Наименьшее положительное из чисел 2π есть по определению *период функции*.

6. Монотонность. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на промежутке X, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции.

Возрастающие и убывающие функции называются *монотонными*. К монотонным функциям, наряду с возрастающими и убывающими, относятся неубывающие и невозрастающие функции.

7. Экстремумы функции (локальные максимумы и минимумы). *Окрестностью точки* x_0 называется произвольный интервал (a, b), содержащий эту точку внутри себя. Если существует такая окрестность точки x_0, во всех точках которой $f(x) < f(x_0)$, то точка x_0 называется *точкой максимума функции* $f(x)$, а значение $f(x_0)$ — *локальным максимумом функции*. Аналогично, при выполнении неравенства $f(x) > f(x_0)$ возникает *локальный минимум* $f(x_0)$.

8. Асимптоты. Если при стремлении аргумента x к бесконечности $(x \to \infty)$ функция y стремится к постоянному числу a, то прямая $y = a$ называется *горизонтальной асимптотой*. Например, функция $y = 2 + \frac{1}{x}$ неограниченно приближается к числу 2 при $(x \to \infty)$. Следовательно, $y = 2$ — горизонтальная асимптота.

Если при стремлении аргумента x функции $y = f(x)$ к постоянному числу b модуль функции $|y|$ неограниченно возрастает, то прямая $x = b$ называется *вертикальной асимптотой*. Например, функция $y = \frac{1}{x-1}$ будет неограниченно возрастать по модулю, если $x \to 1$, поэтому прямая $x = 1$ есть вертикальная асимптота.

В экономике наиболее часто используются следующие функции.

1. Функция полезности — зависимость полезности, т.е. результата, эффекта некоторого действия от уровня (интенсивности) этого действия.

2. Производственная функция — зависимость результата производственной деятельности от обусловивших его факторов.

3. Функция выпуска — зависимость объема производства от наличия или потребления ресурсов.

4. Функция издержек — зависимость издержек производства от объема продукции.

5. Функции спроса, потребления и предложения — зависимость объема спроса, потребления или предложения на отдельные товары или услуги от различных факторов (например, цены, дохода и т.п.) и др.

Преобразование графиков

График функции $y = f_1(x) \pm f_2(x)$ можно получить, построив два вспомогательных графика $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ и затем складывая (вычитая) их ординаты при одинаковых значениях x. Аналогично строятся графики $y = f_1(x) \cdot f_2(x)$ и $y = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$.

График функции $y = f(x) + c$ можно получить путем сдвига графика функции $y = f(x)$ вдоль оси ординат на c единиц вверх, если $c > 0$, и на c единиц вниз, если $c < 0$.

График функции $y = f(x + a)$ можно получить путем сдвига графика функции $y = f(x)$ вдоль оси абсцисс на a единиц вправо, если $a < 0$, и на a единиц влево, если $a > 0$.

График функции $y = f(kx)$ можно получить путем сжатия графика функции $y = f(x)$ вдоль оси абсцисс в k раз.

График функции $y = kf(x)$ можно получить путем растяжения графика функции $y = f(x)$ вдоль оси ординат в k раз.

Обзор элементарных функций

Элементарной называется функция, которая может быть задана одной формулой вида $y = f(x)$, где справа стоящее выражение составлено из основных элементарных функций и постоянных при помощи конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и взятия функции от функции. На основании определения следует, что элементарные функции являются функциями, заданными аналитически. Элементарные функции делятся на алгебраические и неалгебраические (трансцендентные). *Алгебраической* называется функция, в которой над аргументом проводится конечное число алгебраических действий. К ним относятся:

целая рациональная функция

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n;$$

дробно-рациональная функция

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n};$$

иррациональная функция, если ее аргумент содержится под знаком корня.

Функция, не являющаяся алгебраической, называется трансцендентной. Например, это любая *тригонометрическая* функция.

Основными элементарными функциями называются следующие аналитически заданные функции.

1. Степенная функция $y = x^{\alpha}$, где α — любое действительное число a.

2. Показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

3. Логарифмическая функция $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$.

4. Тригонометрические функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \sec x$, $y = \operatorname{cosec} x$.

5. Обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$, $y = \operatorname{arcsec} x$, $y = \operatorname{arccosec} x$.

Рассмотрим графики некоторых основных элементарных функций: степенной функции $y = x^{\alpha}$ (рис. 1.5 и 1.6); квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ (рис. 1.7); показательной функции $y = a^x$ (рис. 1.8); логарифмической функции $y = \log_a x$ (рис. 1.9); тригонометрических функций (рис. 1.10—1.13); обратных тригонометрических функций (рис. 1.14—1.17).

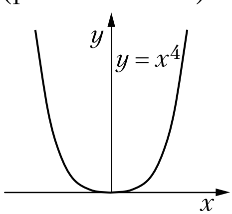

Рис. 1.5

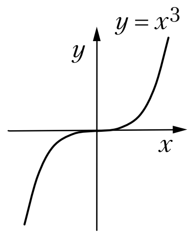

Рис. 1.6

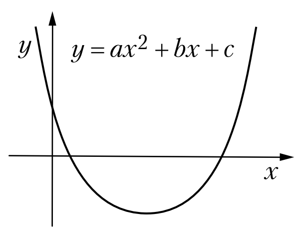

Рис. 1.7

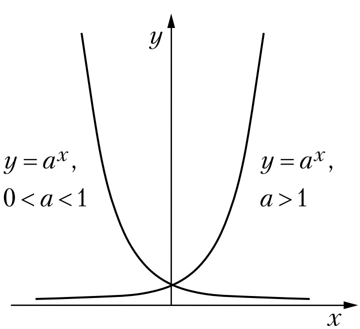

Рис. 1.8

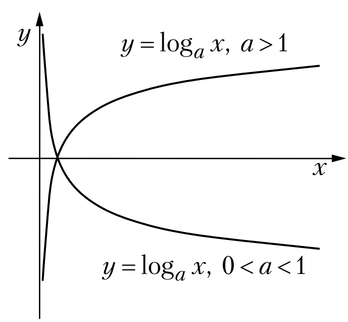

Рис. 1.9

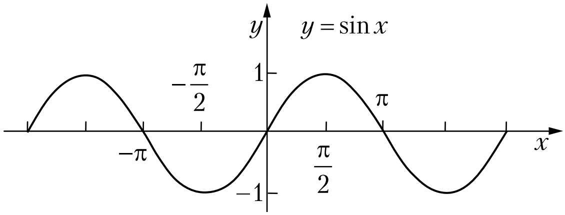

Рис. 1.10

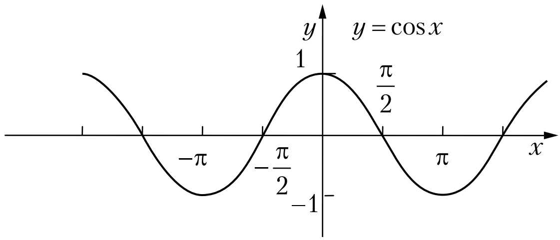

Рис. 1.11

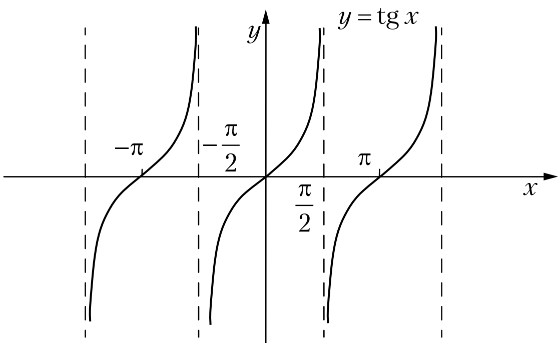

Рис. 1.12

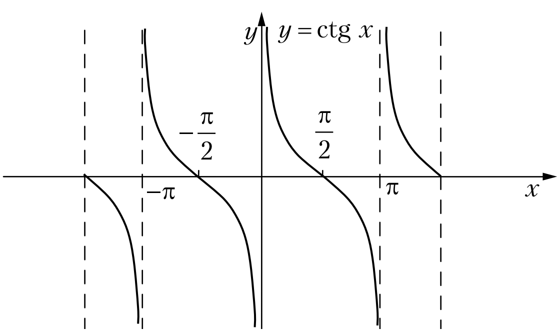

Рис. 1.13

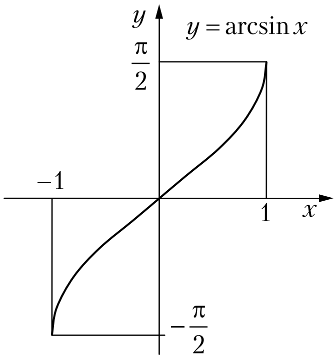

Рис. 1.14

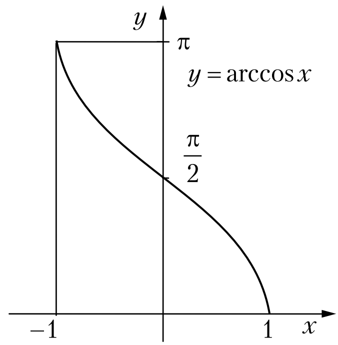

Рис. 1.15

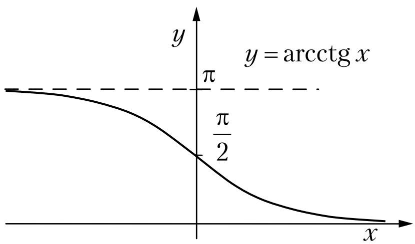

Рис. 1.16

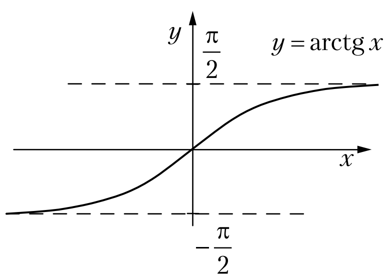

Рис. 1.17

Введем дополнительно две функции. Первая из них

$$y = \mathrm{sgn}\, x,$$

называется *сигнум* x, т.е. знак переменной x:

$$y = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Вторая называется *антье* x (целая часть переменной x) и записывается в виде $y=[x]$ (рис. 1.18 и 1.19).

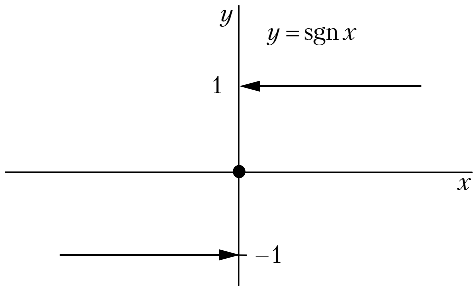

Рис. 1.18

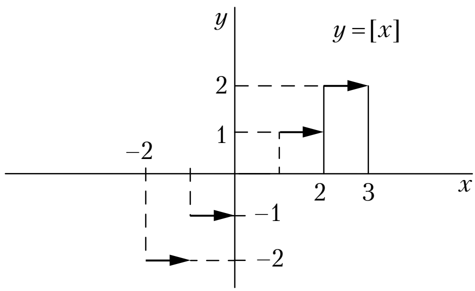

Рис. 1.19

Примеры решения задач

1. Построить график функции $y=e^{\frac{1}{x^2}}$.

Решение: Заметим, что функция $y=e^{\frac{1}{x^2}}$ является четной. Построим график в правой полуплоскости и симметрично отразим его в левую.

При $x\to+\infty$ $\frac{1}{x^2}\to 0$, $e^{\frac{1}{x^2}}\to 1 \Rightarrow y=1$ — горизонтальная асимптота.

При $x\to+0$ $e^{\frac{1}{x^2}}\to+\infty \Rightarrow x=0$ — вертикальная асимптота. На интервале $(0,+\infty)$ функция убывает. График функции представлен на рис. 1.20.

2. Построить график функции $y=x-[x]$.

Решение. График функции $y=x-[x]$ удобно строить последовательно. Строим $y_1=x$, затем $y_2=[x]$ и $y_3=-[x]$. После чего строим $y=y_1+y_3$, складывая значения ординат при одинако-