

**В. А. Малугин**

# **МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДЛЯ ЭКОНОМИЧЕСКОГО БАКАЛАВРИАТА**

**УЧЕБНИК И ПРАКТИКУМ**

*Допущено УМО*

*по классическому университетскому образованию  
в качестве учебного пособия для студентов  
высших учебных заведений, обучающихся  
по направлению 080100 «Экономика»*

**Книга доступна в электронной библиотечной системе  
[biblio-online.ru](http://biblio-online.ru)**

**Москва ■ Юрайт ■ 2015**

УДК 51  
ББК 22.161.я73  
М18

**Автор:**

**Малугин Виталий Александрович** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математических методов анализа экономики экономического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова.

**Малугин, В. А.**

М18 Математический анализ для экономического бакалавриата : учебник и практикум / В. А. Малугин. — 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2015. — 557 с. — Серия : Бакалавр. Базовый курс.

ISBN 978-5-9916-2406-0

В учебнике рассмотрены основные идеи дифференциального и интегрального исчисления, а также классические методы оптимизации. Его цель — в доступной форме рассмотреть важные разделы математического анализа и их применение при решении широкого круга различных задач. Изложение сопровождается многочисленными примерами и поясняющими рисунками. Большинство глав заканчивается задачами, предлагаемыми для самостоятельного решения, ответы к которым приведены в конце книги.

Соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования третьего поколения.

*Учебник для студентов экономических направлений и может быть полезен преподавателям при организации учебного процесса, включая проведение семинарских занятий, а также для практических работников, проходящих переподготовку.*

УДК 51  
ББК 22.161я73

# Оглавление

Предисловие .....	10
<b>Глава 1. Элементарные функции и их графики.....</b>	<b>12</b>
Определение функции.....	12
Способы задания функций .....	12
Декартова система координат.....	13
Полярная система координат.....	13
Формы задания функций .....	15
Основные свойства функций.....	16
Преобразование графиков.....	18
Обзор элементарных функций.....	18
Примеры решения задач .....	22
Вопросы и задания для повторения.....	25
Задачи для самостоятельного решения.....	25
<b>Глава 2. Числовые последовательности.....</b>	<b>29</b>
Сходимость последовательности .....	29
Кванторы.....	30
Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности	31
Ограниченность последовательности .....	31
Теоремы о сходимости последовательности.....	33
Примеры решения задач .....	34
Вопросы и задания для повторения.....	38
Задачи для самостоятельного решения.....	38
<b>Глава 3. Предел функции .....</b>	<b>42</b>
Понятие предела функции.....	42
Свойства бесконечно малых функций.....	45
Связь между существованием функции в точке $x_0$ и существованием предела при $x \rightarrow x_0$ .....	46
Свойства пределов функций .....	48
Первый замечательный предел .....	49
Второй замечательный предел .....	50
Задача о непрерывном начислении процентов .....	52
Символ Ландау (символ $o$ -малое) .....	55
Свойства символа $o$ -малое.....	56

Асимптотические равенства .....	59
<i>Примеры решения задач</i> .....	61
<i>Вопросы и задания для повторения</i> .....	67
<i>Задачи для самостоятельного решения</i> .....	68
<b>Глава 4. Непрерывность функции .....</b>	<b>76</b>
Определение непрерывности.....	76
Свойства непрерывных функций.....	79
Точки разрыва функции. Их классификация.....	80
Свойства функций, непрерывных на отрезке .....	83
<i>Первая теорема Больцано — Коши (о нуле непрерывной функции)</i> .....	83
<i>Вторая теорема Больцано — Коши (о промежуточных значениях непрерывной функции)</i> .....	84
<i>Первая теорема Вейерштрасса (об ограниченности непрерывной на отрезке функции)</i> .....	84
<i>Вторая теорема Вейерштрасса (о достижении непрерывной на отрезке функции своих верхней и нижней границ)</i> .....	85
<i>Примеры решения задач</i> .....	86
<i>Вопросы и задания для повторения</i> .....	87
<i>Задачи для самостоятельного решения</i> .....	87
<b>Глава 5. Производная и дифференциал функции .....</b>	<b>90</b>
Производная функции одной переменной .....	90
Дифференциал функции .....	95
Правила вычисления производных .....	96
Правила вычисления дифференциалов .....	99
Производные некоторых элементарных функций (таблица производных).....	100
Инвариантность формы первого дифференциала .....	104
<i>Примеры решения задач</i> .....	105
<i>Вопросы и задания для повторения</i> .....	108
<i>Задачи для самостоятельного решения</i> .....	108
<b>Глава 6. Геометрические приложения производной.....</b>	<b>116</b>
Уравнение касательной к кривой.....	116
Геометрический смысл производной (производная как тангенс угла наклона) .....	117
Угол между кривыми.....	119
Условие параллельности двух прямых .....	120
Условие перпендикулярности двух прямых.....	120
Геометрический смысл дифференциала.....	121
<i>Примеры решения задач</i> .....	121
<i>Вопросы и задания для повторения</i> .....	125
<i>Задачи для самостоятельного решения</i> .....	125

<b>Глава 7. Производные и дифференциалы высших порядков.....</b>	<b>130</b>
Производные высших порядков.....	130
Дифференциалы высших порядков.....	131
Производные функций, заданных неявно.....	132
Производные функций, заданных параметрически.....	134
<i>Примеры решения задач</i> .....	135
<i>Вопросы и задания для повторения</i> .....	139
<i>Задачи для самостоятельного решения</i> .....	139
<b>Глава 8. Основные теоремы дифференциального исчисления.....</b>	<b>143</b>
Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши.....	143
Раскрытие неопределенностей (правило Лопиталя).....	148
Сравнение функций по скорости роста.....	151
Формулы Маклорена и Тейлора.....	152
Разложение по формуле Маклорена элементарных функций... ..	155
<i>Примеры решения задач</i> .....	158
<i>Вопросы и задания для повторения</i> .....	162
<i>Задачи для самостоятельного решения</i> .....	163
<b>Глава 9. Исследование функций с помощью производных .....</b>	<b>168</b>
Условия возрастания и убывания функции.....	168
Понятие экстремума .....	169
Необходимое условие экстремума.....	170
Первое достаточное условие экстремума .....	171
Схема исследования функции на экстремум.....	174
Второе достаточное условие экстремума.....	174
Наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке.....	176
Выпуклость функции. Точки перегиба .....	176
Схема исследования функции на выпуклость .....	179
Асимптоты графика функции.....	180
Исследование функций и построение их графиков.....	184
<i>Эластичность функции</i> .....	188
<i>Геометрическая интерпретация</i> .....	189
<i>Свойства эластичности функции</i> .....	190
<i>Эластичность элементарных функций</i> .....	192
<i>Примеры решения задач</i> .....	192
<i>Вопросы и задания для повторения</i> .....	202
<i>Задачи для самостоятельного решения</i> .....	203
<b>Глава 10. Функции нескольких переменных .....</b>	<b>209</b>
Понятие функции как отображения.....	209
Введение в функции нескольких переменных.....	210

Понятие функции нескольких переменных .....	210
Линии уровня.....	213
Предел функции нескольких переменных.....	216
Непрерывность.....	221
Непрерывность функции нескольких переменных.....	221
Свойства непрерывных функций нескольких переменных .....	223
Частные производные .....	225
Частные производные функции $f(x, y)$ .....	225
Геометрический смысл частной производной .....	226
Понятие дифференцируемости .....	228
Определение дифференцируемости функции нескольких переменных.....	228
Следствие о приращении дифференцируемой функции .....	229
Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции нескольких переменных.....	230
Полный дифференциал.....	235
Полный дифференциал функции нескольких переменных.....	235
Частные дифференциалы функции нескольких переменных .....	236
Сложные функции. Их производные .....	237
Дифференцируемость сложной функции нескольких переменных .....	237
Производная функции $z = z(x, y)$ при $x = x(t)$ и $y = y(t)$ .....	238
Производная функции $z = z(u, v)$ при $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ .....	239
Производная функции $z = z(u, v)$ при произвольном задании аргументов.....	239
Неявные функции. Их производные.....	240
Уравнение $F(x, y) = 0$ в дифференциалах.....	241
Уравнение $F(x, y) = 0$ в производных.....	241
Уравнение $F(x, y, z) = 0$ в дифференциалах.....	241
Уравнение $F(x, y, z) = 0$ в производных .....	242
Однородные функции.....	242
Теорема Эйлера (о формуле для однородной функции).....	243
Производная по направлению.....	243
Производная по направлению.....	243
Градиент.....	246
Свойства градиента .....	248
Производные и дифференциалы высших порядков .....	249
Производные высших порядков функции нескольких переменных .....	249
Дифференциалы высших порядков функции нескольких переменных.....	253
Формула Тейлора.....	256
Макроэкономическая функция Кобба – Дугласа.....	260

Понятие производственной функции.....	260
Требования к производственной функции.....	261
Функция Кобба – Дугласа как макроэкономическая производственная функция .....	261
Примеры решения задач .....	266
Вопросы и задания для повторения.....	276
Задачи для самостоятельного решения .....	276
<b>Глава 11. Классические методы оптимизации .....</b>	<b>287</b>
Локальный экстремум.....	287
Определение локального экстремума.....	287
Необходимые условия локального экстремума .....	289
Достаточные условия локального экстремума .....	290
Использование квадратичных форм .....	292
Условный экстремум.....	297
Определение условного экстремума .....	297
Первый метод нахождения условного экстремума .....	298
Второй метод нахождения условного экстремума (метод Лагранжа).....	301
Геометрическая интерпретация необходимых условий локального экстремума .....	303
Окаймленный гессиан .....	305
Последовательность действий при отыскании условных экстремумов функции двух переменных.....	308
Условный экстремум функции $n$ переменных с $t$ уравнениями связи.....	314
Экстремум неявной функции .....	316
Глобальный экстремум .....	320
Экстремум в системах функций .....	324
Метод Лагранжа при исследовании на условный экстремум в системах функций .....	325
Экстремум в системах неравенств .....	331
Примеры решения задач .....	335
Вопросы и задания для повторения .....	350
Задачи для самостоятельного решения .....	351
<b>Глава 12. Приложения к экономической теории.....</b>	<b>360</b>
Максимизация выпуска при наличии лимита на ресурсы .....	360
Решение в общем виде задачи максимизации выпуска при наличии лимита на ресурсы .....	360
Некоторые утверждения о предельных отношениях (выпуск продукции при вариациях лимита на ресурсы или цены за ресурс).....	363
Минимизация издержек при фиксированном объеме выпуска.....	365
Решение в общем виде задачи минимизации издержек при фиксированном объеме выпуска.....	365

<i>Некоторые утверждения о предельных отношениях (издержки при вариации объема выпуска или цены за ресурс)</i> .....	366
Оптимизация потребительского поведения.....	368
<i>Спрос на товары при максимизации целевой функции</i> .....	368
<i>Изменение спроса на товары при вариации дохода потребителя</i> .....	370
Глобальный экстремум в задачах математического программирования .....	372
<i>Вопросы и задания для повторения</i> .....	376
<b>Глава 13. Неопределенные интегралы</b> .....	<b>377</b>
Понятие первообразной .....	377
Свойства неопределенного интеграла .....	379
Табличные интегралы .....	380
Методы нахождения неопределенных интегралов .....	381
<i>Приведение к табличному виду</i> .....	381
<i>Подведение под знак дифференциала</i> .....	382
<i>Интегрирование заменой переменной, или подстановка</i> .....	383
<i>Интегрирование по частям</i> .....	384
<i>Интегрирование рациональных дробей</i> .....	385
<i>Метод неопределенных коэффициентов</i> .....	387
<i>Последовательность нахождения интеграла методом неопределенных коэффициентов</i> .....	389
<i>Примеры решения задач</i> .....	391
<i>Вопросы и задания для повторения</i> .....	398
<i>Задачи для самостоятельного решения</i> .....	398
<b>Глава 14. Определенные интегралы</b> .....	<b>405</b>
Площадь криволинейной трапеции .....	405
Свойства определенного интеграла .....	407
Производная интеграла с переменным верхним пределом .....	410
Формула Ньютона – Лейбница .....	411
Формула замены переменной в определенном интеграле.....	413
Формула интегрирования по частям.....	414
Приближенное вычисление определенных интегралов .....	415
Оценка определенных интегралов.....	417
Вычисление площадей плоских фигур.....	417
<i>Примеры решения задач</i> .....	420
<i>Вопросы и задания для повторения</i> .....	425
<i>Задачи для самостоятельного решения</i> .....	426
<b>Глава 15. Несобственные интегралы</b> .....	<b>432</b>
Несобственные интегралы первого рода.....	432
Эталонный интеграл первого рода .....	433
Несобственные интегралы второго рода.....	434



---

Эталонный интеграл второго рода.....	435
Исследование на сходимость несобственных интегралов первого и второго рода от неотрицательных функций .....	437
Исследование на сходимость интегралов от знакопеременных функций .....	441
Использование интегралов в экономике .....	442
<i>Задача о неравномерном распределении доходов</i> .....	443
<i>Задача замены оборудования</i> .....	444
<i>Примеры решения задач</i> .....	445
<i>Вопросы и задания для повторения</i> .....	448
<i>Задачи для самостоятельного решения</i> .....	448
<b>Глава 16. Двойные интегралы .....</b>	<b>451</b>
Понятие двойного интеграла .....	451
Основные свойства двойного интеграла .....	454
Нахождение двойных интегралов.....	455
<i>Примеры решения задач</i> .....	459
<i>Вопросы и задания для повторения</i> .....	461
<i>Задачи для самостоятельного решения</i> .....	462
<b>Глава 17. Элементы теории множеств.....</b>	<b>466</b>
Необходимое и достаточное условия. Определения .....	466
Операции над множествами .....	467
Булева алгебра .....	470
<i>Примеры решения задач</i> .....	474
<i>Вопросы и задания для повторения</i> .....	475
<i>Задачи для самостоятельного решения</i> .....	475
<b>Глава 18. Комплексные числа .....</b>	<b>477</b>
Понятие комплексного числа .....	477
Арифметические операции над комплексными числами .....	478
Комплексная плоскость .....	478
Функция комплексного переменного .....	479
Тригонометрическая форма комплексного числа .....	479
Формула Муавра .....	481
Извлечение корня из комплексного числа .....	482
Показательная форма комплексного числа.....	484
Свойства комплексной показательной функции .....	485
Основная теорема алгебры.....	486
<i>Вопросы и задания для повторения</i> .....	487
<i>Примеры решения задач</i> .....	487
<b>Ответы к задачам для самостоятельного решения .....</b>	<b>490</b>
<b>Тематический указатель .....</b>	<b>553</b>
<b>Список литературы.....</b>	<b>557</b>

## Предисловие

Естественнонаучные дисциплины давно развиваются при активном использовании все более усложняющегося и изощренного математического аппарата, а в последние 50—100 лет к его освоению приступили и ряд гуманитарных наук, например экономика, социология, филология и др. Так, во второй половине XX в. все нобелевские премии по экономике были получены за результаты, полученные с применением математических методов. В данном учебнике сделан акцент на те разделы математики, в частности математического анализа, которые в первую очередь понадобятся будущим экономистам.

Математический анализ, как и в целом математика, оперирует величинами. Это одно из основных понятий, которое настолько всеобъемлющее, что ему трудно дать точное определение. Характерное свойство величины заключается в том, что она может быть измерена, т.е. тем или иным путем сравнена с некоторой определенной величиной того же рода, которая принимается за единицу меры. Процесс сравнения зависит от свойств исследуемой величины и называется *измерением*. Любой закон природы предлагает соотношение между числами, которые выражают величины.

За последние годы многие понятия, воспринимавшиеся лишь качественно, например эффективность, информация, правдоподобие, «повышены в должностях» и переведены в разряд величин, т.е. объектов, подлежащих изучению математическими методами.

Под *математическим анализом* будем понимать логичные рассуждения, приводящие к установлению истины, с использованием теорем и выводимых на их основе формул (количественных соотношений). Рассмотрен его математический инструментарий и применение при исследовании экономических объектов и связей между ними.

Особенности преподавания математического анализа для будущих экономистов предполагают выделение, т.е. более подробное изучение, отдельных разделов, которые находят

широкое и продуктивное применение в экономике. Другие разделы освещаются в той мере, которая необходима будущим бакалаврам для восприятия математического анализа как целостной науки, опирающейся на тщательно разработанный теоретический фундамент. Поэтому в дальнейшем они, используя приобретенные знания, умения, навыки и компетенции, смогут эффективно решать разнообразные задачи в рамках избранной профессии и осваивать усложняющийся математический аппарат.

Учебник написан по курсу «Математический анализ» и направлению «Экономика» в соответствии с Федеральным государственным стандартом высшего профессионального образования на основе материалов лекций и семинаров, которые проводились на первом курсе экономического факультета МГУ. Основной упор в нем сделан на самостоятельную работу.

Символами ◀ и ▶ в учебнике обозначаются соответственно начало и конец доказательств основных утверждений и теорем.

# Глава 1

## ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

---

Каждый изучивший данную главу должен:

**знать** декартову и полярную системы координат, основные свойства функций, основные элементарные функции;

**уметь** строить элементарные функции в декартовой системе координат, используя основные свойства функций, преобразовывать графики элементарных функций;

**владеть** навыками работы с функциями одной переменной, основными методами построения графиков простых элементарных функций.

---

### Определение функции

*Постоянной величиной* называется величина, сохраняющая одно и то же значение. Переменной называется величина, которая может принимать различные числовые значения. Если каждому значению переменной  $x$  из множества  $X$  ставится в соответствие одно вполне определенное значение другой величины  $y$  из множества  $Y$ , то величина  $y$  называется *функцией величины  $x$*  и обозначается  $y = f(x)$ . При этом величина  $x$  называется *независимой переменной (аргументом)*, величина  $y$  — *зависимой переменной (функцией)*.

### Способы задания функций

Существует несколько способов задания функции.

1. Аналитический способ. Функция задается формулой вида  $y = f(x)$ .

2. Табличный способ. Функция задается таблицей, содержащей значения аргумента и соответствующие им значения функции.

3. Графический способ. На координатной плоскости изображается совокупность точек.

Положение каждой точки на плоскости можно определить с помощью декартовой или полярной систем координат.

### Декартова система координат

На плоскости строятся две взаимно перпендикулярные прямые — оси (например, горизонтальная ( $OX$ ) — абсцисса и вертикальная ( $OY$ ) — ордината), которые масштабируются (рис. 1.1). Начальной точкой отсчета (нулем) является точка пересечения прямых. Направо и вверх по осям откладываются положительные значения, налево и вниз — отрицательные. Каждой точке  $M$  на координатной плоскости соответствует пара значений переменных  $(x, y)$  и обратно: каждой такой паре соответствует на плоскости одна точка. Совокупность этих точек представляет собой график функции.

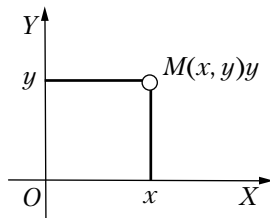


Рис. 1.1

### Полярная система координат

На плоскости берется произвольная точка  $O$  — полюс. Из него выходит полупрямая — полярная ось. Каждой точке  $M$  на плоскости ставится в соответствие число  $\rho$  ( $\rho \geq 0$ ), выражающее расстояние точки  $M$  от полюса, и число  $\varphi$  ( $0 \leq \varphi < 2\pi$ ) — величина угла, образованного отрезком  $OM$  с полярной осью. Это соответствие, как и в случае с декартовой системой координат при условии ( $0 \leq \varphi < 2\pi$ ), является взаимно-однозначным. Положительным направлением отсчета угла  $\varphi$  считается проводимое против часовой стрелки. Числа  $\rho$  и  $\varphi$  называются *полярными координатами точки  $M$*  (рис. 1.2). Уравнение  $\rho = f(\varphi)$  в полярной системе координат определяет некоторую линию.

Легко установить связь между полярными и прямоугольными декартовыми координатами. Пусть начало прямоугольной системы координат совпадает с полюсом,

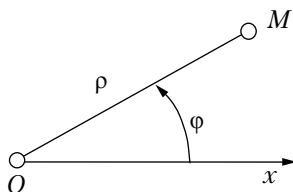


Рис. 1.2

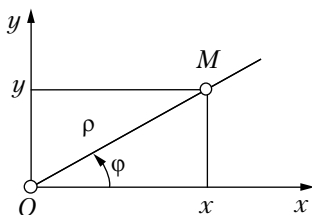


Рис. 1.3

а положительное направление оси  $Ox$  — с полярной осью. Из рис. 1.3 непосредственно следует

$x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$  и обратно:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg(y/x).$$

**Пример 1.** Построить график функции  $\rho = \varphi$ .

*Решение.* Составим таблицу значений  $(\varphi, \rho)$ , записывая аргумент  $\varphi$  в радианах, функцию  $\rho$  — в виде десятичной дроби:

$\varphi$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\rho$	0	0,79	1,57	2,35	3,14	4,71	6,28

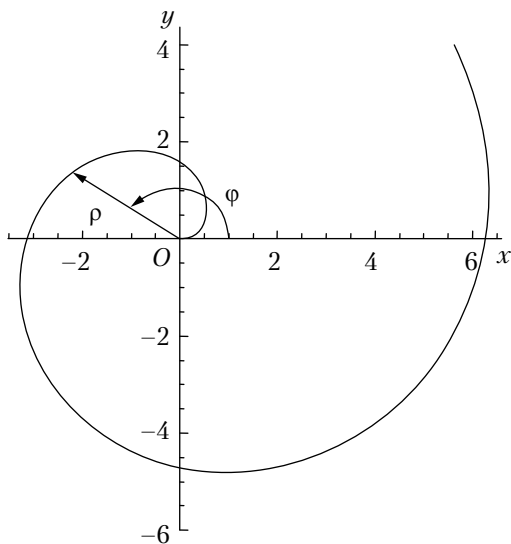


Рис. 1.4

Поворачивая радиус-вектор  $\rho$  на угол  $\varphi$ , строим график по точкам (рис. 1.4).

## Формы задания функций

Функция называется *явной*, если она задана формулой, в которой правая часть не содержит зависимой переменной, например  $y = x^2 + 5x - 6$ .

Функция  $y$  аргумента  $x$  называется *неявной*, если она задана уравнением  $F(x, y) = 0$ , не разрешенным относительно зависимой переменной. Например,  $x \ln x + y \sin y = 0$ .

*Обратная функция.* Пусть между переменными  $x$  и  $y$ , заданными уравнением  $y = f(x)$ , существует взаимно-однозначное соответствие. Рассмотрим для примера функцию  $y = 2x - 1$ . Выразив в этом уравнении переменную  $x$  через  $y$ , получим  $x = \frac{y+1}{2}$ .

Оба уравнения описывают одну совокупность точек на координатной плоскости. Связь между переменными одна и та же, различие лишь в форме записи. Эту функцию  $x$  от аргумента  $y$  называют *обратной* по отношению к исходной. В последнем уравнении задается значение переменной  $y$ , вычисляется значение переменной  $x$ . Обозначим независимую переменную через  $x$ , зависимую переменную через  $y$  и перепишем наше уравнение в виде

$$y = \frac{x+1}{2}.$$

В дальнейшем под обратной будем подразумевать именно эту функцию.

В общем виде, имея  $y = f(x)$ , можем выразить  $x$  через  $y$ , введя специальное обозначение  $\operatorname{arcs}$ , т.е.  $x = \operatorname{arcs} f(y)$ . Это другая форма записи исходной функциональной зависимости. Поменяем переменные:  $y = \operatorname{arcs} f(x)$ . Перед нами обратная функция. Обратную функцию обозначают также в виде  $y = f^{-1}(x)$ . Можно доказать, что для любой строго монотонной функции существует обратная функция. Графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

*Сложная функция.* Пусть функция  $y = f(u)$  — функция от переменной  $u$ , определенной на множестве  $U$  с областью значений  $Y$ , а переменная  $u$ , в свою очередь, является функцией  $u = \varphi(x)$  от переменной  $x$ , определенной на множестве  $X$  с областью значений  $U$ . Тогда заданная на множестве  $X$  функция  $y = f[\varphi(x)]$  называется *сложной* функцией аргумента  $x$ . Например,  $y = \ln \cos x$  — сложная функция.

*Параметрическая функция.* Если переменные  $x$  и  $y$  связаны через третью переменную  $t$ , то функция задана *параметрически*. Например, 
$$\begin{cases} x = 0,3t \\ y = 2t \end{cases}.$$

Функция, заданная в полярных координатах. Например, 
$$r = \frac{2}{\varphi}.$$

## Основные свойства функций

1. Область определения (допустимых значений) аргумента. Множество  $X$ , на котором задана переменная  $x$ , называется *областью определения функции (допустимых значений)* аргумента (ОДЗ). В частном случае это может быть отрезок  $[a, b]$ , т.е.  $a \leq x \leq b$ , или интервал  $(a, b)$ , т.е.  $a < x < b$ .

2. Область изменения (область значений) функции. Соответствующая всем возможным значениям аргумента совокупность значений функции называется *областью изменения функции*.

3. Корни (нули) функции. *Корнями функции* называются значения аргумента, при которых функция обращается в нуль.

4. Четность. Функция  $y = f(x)$  называется *четной*, если для любых значений  $x$  из области определения справедливо соотношение  $f(-x) = f(x)$ , и *нечетной*, если  $f(-x) = -f(x)$ . В противном случае функция  $y = f(x)$  называется *функцией общего вида*. График четной функции симметричен относительно оси ординат, нечетной — относительно начала координат.

5. Периодичность. Функция называется *периодической*, если существуют такие постоянные числа, при прибавлении которых к аргументу значение функции не изменяется. Наименьшее положительное из этих чисел называется *периодом*. Например, значение функции  $y = \sin x$  не изменится, если к аргументу прибавлять любое число из множества  $\{2\pi n\}$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ . Наименьшее положительное из чисел  $2\pi$  есть по определению *период функции*.

6. Монотонность. Функция  $y = f(x)$  называется *возрастающей (убывающей)* на промежутке  $X$ , если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции.



Возрастающие и убывающие функции называются *монотонными*. К монотонным функциям, наряду с возрастающими и убывающими, относятся неубывающие и невозрастающие функции.

7. Экстремумы функции (локальные максимумы и минимумы). *Окрестностью точки*  $x_0$  называется произвольный интервал  $(a, b)$ , содержащий эту точку внутри себя. Если существует такая окрестность точки  $x_0$ , во всех точках которой  $f(x) < f(x_0)$ , то точка  $x_0$  называется *точкой максимума функции*  $f(x)$ , а значение  $f(x_0)$  — *локальным максимумом функции*. Аналогично, при выполнении неравенства  $f(x) > f(x_0)$  возникает *локальный минимум*  $f(x_0)$ .

8. Асимптоты. Если при стремлении аргумента  $x$  к бесконечности ( $x \rightarrow \infty$ ) функция  $y$  стремится к постоянному числу  $a$ , то прямая  $y = a$  называется *горизонтальной асимптотой*. Например, функция  $y = 2 + \frac{1}{x}$  неограниченно приближается к числу 2 при ( $x \rightarrow \infty$ ). Следовательно,  $y = 2$  — горизонтальная асимптота.

Если при стремлении аргумента  $x$  функции  $y = f(x)$  к постоянному числу  $b$  модуль функции  $|y|$  неограниченно возрастает, то прямая  $x = b$  называется *вертикальной асимптотой*. Например, функция  $y = \frac{1}{x-1}$  будет неограниченно возрастать по модулю, если  $x \rightarrow 1$ , поэтому прямая  $x = 1$  есть вертикальная асимптота.

В экономике наиболее часто используются следующие функции.

1. Функция полезности — зависимость полезности, т.е. результата, эффекта некоторого действия от уровня (интенсивности) этого действия.

2. Производственная функция — зависимость результата производственной деятельности от обусловивших его факторов.

3. Функция выпуска — зависимость объема производства от наличия или потребления ресурсов.

4. Функция издержек — зависимость издержек производства от объема продукции.

5. Функции спроса, потребления и предложения — зависимость объема спроса, потребления или предложения на отдельные товары или услуги от различных факторов (например, цены, дохода и т.п.) и др.

## Преобразование графиков

График функции  $y = f_1(x) \pm f_2(x)$  можно получить, построив два вспомогательных графика  $y = f_1(x)$  и  $y = f_2(x)$  и затем складывая (вычитая) их ординаты при одинаковых значениях  $x$ . Аналогично строятся графики  $y = f_1(x) \cdot f_2(x)$  и  $y = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ .

График функции  $y = f(x) + c$  можно получить путем сдвига графика функции  $y = f(x)$  вдоль оси ординат на  $c$  единиц вверх, если  $c > 0$ , и на  $c$  единиц вниз, если  $c < 0$ .

График функции  $y = f(x + a)$  можно получить путем сдвига графика функции  $y = f(x)$  вдоль оси абсцисс на  $a$  единиц вправо, если  $a < 0$ , и на  $a$  единиц влево, если  $a > 0$ .

График функции  $y = f(kx)$  можно получить путем сжатия графика функции  $y = f(x)$  вдоль оси абсцисс в  $k$  раз.

График функции  $y = kf(x)$  можно получить путем растяжения графика функции  $y = f(x)$  вдоль оси ординат в  $k$  раз.

## Обзор элементарных функций

Элементарной называется функция, которая может быть задана одной формулой вида  $y = f(x)$ , где справа стоящее выражение составлено из основных элементарных функций и постоянных при помощи конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и взятия функции от функции. На основании определения следует, что элементарные функции являются функциями, заданными аналитически. Элементарные функции делятся на алгебраические и неалгебраические (трансцендентные). *Алгебраической* называется функция, в которой над аргументом проводится конечное число алгебраических действий. К ним относятся:

*целая рациональная функция*

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n;$$

*дробно-рациональная функция*

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n};$$

*иррациональная функция*, если ее аргумент содержится под знаком корня.

Функция, не являющаяся алгебраической, называется трансцендентной. Например, это любая *тригонометрическая* функция.

Основными элементарными функциями называются следующие аналитически заданные функции.

1. Степенная функция  $y = x^\alpha$ , где  $\alpha$  — любое действительное число  $a$ .

2. Показательная функция  $y = a^x$ , где  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

3. Логарифмическая функция  $y = \log_a x$ , где  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $x > 0$ .

4. Тригонометрические функции:  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $y = \operatorname{ctg} x$ ,  $y = \operatorname{sec} x$ ,  $y = \operatorname{cosec} x$ .

5. Обратные тригонометрические функции:  $y = \operatorname{arcsin} x$ ,  $y = \operatorname{arccos} x$ ,  $y = \operatorname{arctg} x$ ,  $y = \operatorname{arcctg} x$ ,  $y = \operatorname{arcsec} x$ ,  $y = \operatorname{arccosec} x$ .

Рассмотрим графики некоторых основных элементарных функций: степенной функции  $y = x^\alpha$  (рис. 1.5 и 1.6); квадратного трехчлена  $y = ax^2 + bx + c$  (рис. 1.7); показательной функции  $y = a^x$  (рис. 1.8); логарифмической функции  $y = \log_a x$  (рис. 1.9); тригонометрических функций (рис. 1.10–1.13); обратных тригонометрических функций (рис. 1.14–1.17).

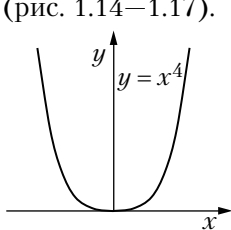


Рис. 1.5

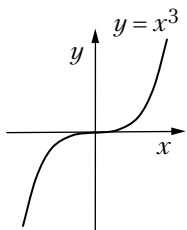


Рис. 1.6

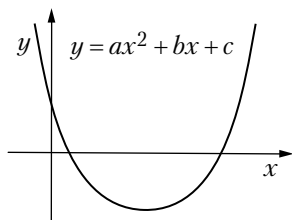


Рис. 1.7

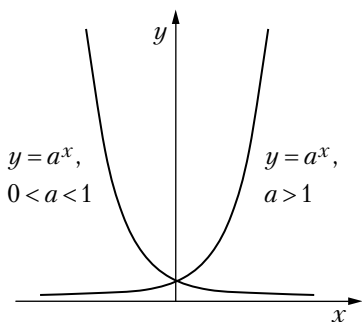


Рис. 1.8

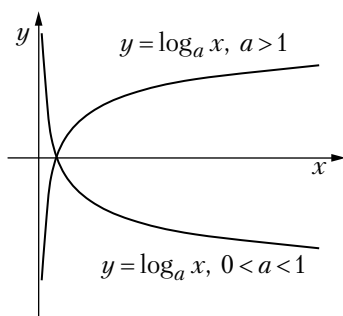


Рис. 1.9

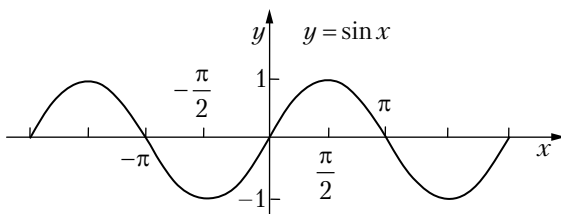


Рис. 1.10

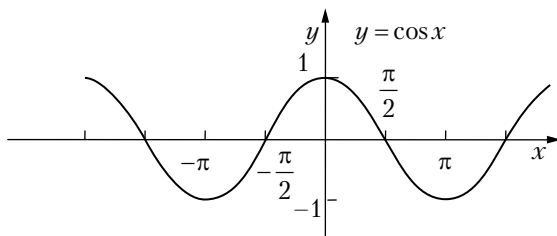


Рис. 1.11

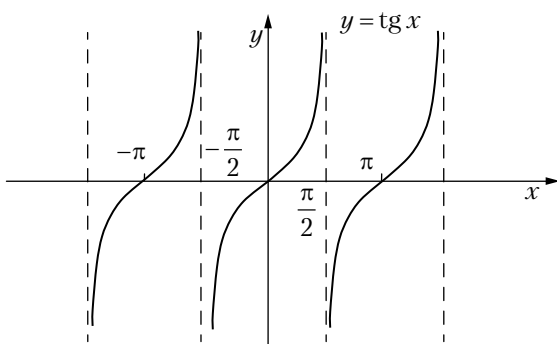


Рис. 1.12

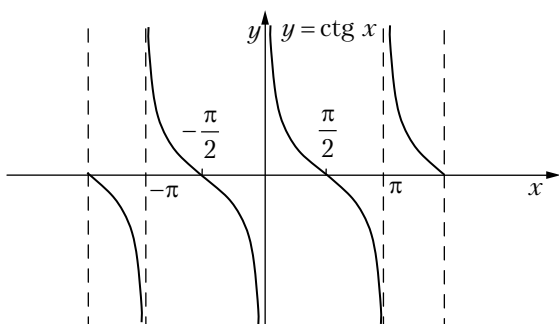


Рис. 1.13

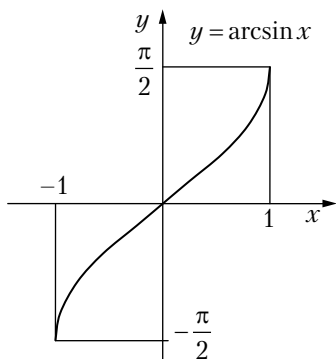


Рис. 1.14

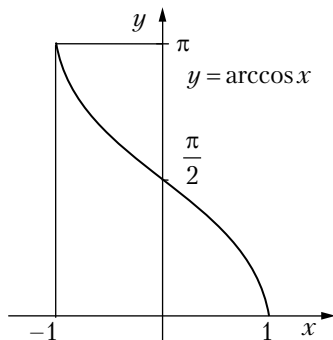


Рис. 1.15

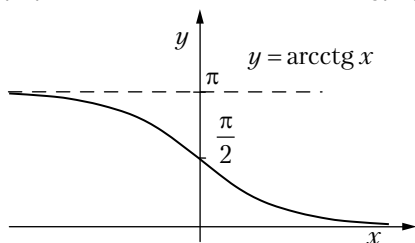


Рис. 1.16

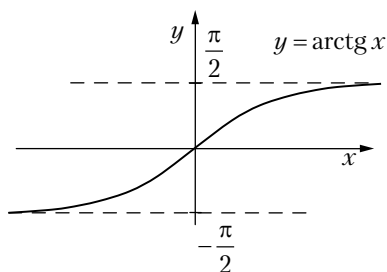


Рис. 1.17

Введем дополнительно две функции. Первая из них

$$y = \operatorname{sgn} x,$$

называется *сигнум*  $x$ , т.е. знак переменной  $x$ :

$$y = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Вторая называется *антье*  $x$  (целая часть переменной  $x$ ) и записывается в виде  $y = [x]$  (рис. 1.18 и 1.19).

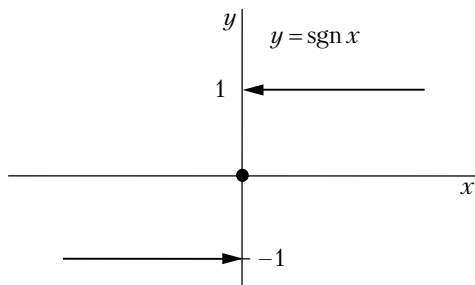


Рис. 1.18

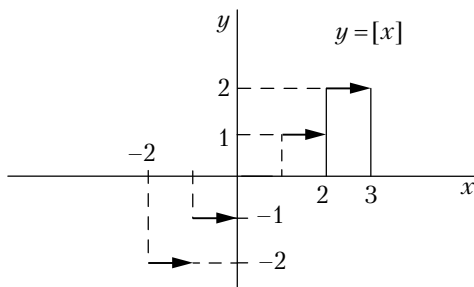


Рис. 1.19

### Примеры решения задач

1. Построить график функции  $y = e^{\frac{1}{x^2}}$ .

*Решение:* Заметим, что функция  $y = e^{\frac{1}{x^2}}$  является четной. Построим график в правой полуплоскости и симметрично отразим его в левую.

При  $x \rightarrow +\infty$   $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$ ,  $e^{\frac{1}{x^2}} \rightarrow 1 \Rightarrow y = 1$  — горизонтальная асимптота.

При  $x \rightarrow +0$   $e^{\frac{1}{x^2}} \rightarrow +\infty \Rightarrow x = 0$  — вертикальная асимптота. На интервале  $(0, +\infty)$  функция убывает. График функции представлен на рис. 1.20.

2. Построить график функции  $y = x - [x]$ .

*Решение.* График функции  $y = x - [x]$  удобно строить последовательно. Строим  $y_1 = x$ , затем  $y_2 = [x]$  и  $y_3 = -[x]$ . После чего строим  $y = y_1 + y_3$ , складывая значения ординат при одинако-