ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е. Б. Бурмистрова, С. Г. Лобанов

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

УЧЕБНИК И ПРАКТИКУМ
ДЛЯ АКАДЕМИЧЕСКОГО БАКАЛАВРИАТА

Допущено Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по экономическим направлениям и специальностям

Книга доступна в электронной библиотечной системе
biblio-online.ru

Москва ▪ Юрайт ▪ 2015

УДК 517
ББК 22.143я73
Б90

***Автор*:**

Бурмистрова Елена Борисовна — кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики факультета экономики Департамента математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики».

Лобанов Сергей Григорьевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей математики факультета экономики Департамента математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики».

***Рецензенты*:**

Богатый С. А. — доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей топологии и геометрии механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова;

Чубаров И. А. — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Московского физико-технического института.

Бурмистрова, Е. Б.

Б90 Линейная алгебра : учебник и практикум для академического бакалавриата / Е. Б. Бурмистрова, С. Г. Лобанов. — М. : Издательство Юрайт, 2015. — 421 с. — Серия : Бакалавр. Академический курс.

ISBN 978-5-9916-3588-2

В учебнике приведены сведения из линейной алгебры и аналитической геометрии, которые отражают как требования образовательных стандартов, так и потребности основных разделов современной экономической теории. Учебник предназначен для первоначального знакомства с предметом и не требует какой бы то ни было математической подготовки сверх обычной программы средней школы. Помимо иллюстрирующих основной материал примеров, учебник содержит задачи для самостоятельного решения.

Соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования третьего поколения.

Для студентов и преподавателей математических дисциплин экономических и технических учебных заведений.

УДК 517
ББК 22.143я73

ISBN 978-5-9916-3588-2

Оглавление

Список обозначений **8**

От авторов **11**

Глава 1. Преобразования матриц и системы линейных уравнений **16**

1.1. Элементарные преобразования матриц 16

1.2. Метод Гаусса 19

1.3. Приведение матрицы к ступенчатому виду 23

1.4. Геометрическая интерпретация систем линейных уравнений в случае двух или трех неизвестных 29

1.5. Упражнения 33

Глава 2. Определитель **34**

2.1. Определитель и элементарные преобразования 35

2.2. Построение определителя разложением по столбцу . . 38

2.3. Упражнения 50

Глава 3. Линейные пространства **51**

3.1. Аксиомы и простейшие следствия аксиом линейного пространства 51

3.2. Простейшие свойства линейно зависимых векторов . . 54

3.3. Базис и координаты векторов 57

3.4. Существование базиса конечномерного пространства . 59

3.5. Размерность линейного пространства 60

3.6. Упражнения 68

Глава 4. Алгебра матриц **71**

4.1. Свойства арифметических операций над матрицами . . 71

4.2. Обратная матрица и формулы Крамера 77

4.3. Преобразование координат при замене базиса 83

4.4. Упражнения 86

Глава 5. Ранг матрицы 89
5.1. Теорема о ранге матрицы 90
5.2. Ранг произведения матриц 92
5.3. Определитель произведения матриц 93
5.4. Упражнения 99
Глава 6. Структура множества решений системы линейных уравнений 101
6.1. Теорема Кронекера — Капелли о совместности системы линейных уравнений 101
6.2. Размерность пространства решений однородной системы линейных уравнений 102
6.3. Структура множества решений системы линейных уравнений 103
6.4. О выборе главных неизвестных 105
6.5. Упражнения 111
Глава 7. Линейные операторы 113
7.1. Матрица линейного оператора 114
7.2. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса 123
7.3. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду 125
7.4. Характеристический многочлен линейного оператора . 126
7.5. О корнях характеристического многочлена линейного оператора 127
7.6. Свойства собственных векторов с одинаковыми и различными собственными значениями 131
7.7. Упражнения 133
Глава 8. Линейные, билинейные и квадратичные формы 135
8.1. Формула линейного функционала 135
8.2. Матрица билинейной формы 136
8.3. Матрица симметричной билинейной формы 138
8.4. Преобразование матрицы билинейной формы при замене базиса 139
8.5. Единственность симметричной билинейной формы, порождающей квадратичную форму 140
8.6. Закон инерции для квадратичных форм 141
8.7. Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы 143
8.8. Упражнения 147

Глава 9. Элементы аналитической геометрии 149
9.1. Прямоугольные декартовы координаты 149
9.2. Векторы на плоскости 156
9.3. Векторы в пространстве 163
9.4. Прямая на плоскости 170
9.5. Прямая и плоскость в пространстве 177
9.6. Упражнения 183
Глава 10. Евклидовы пространства 188
10.1. Определение и примеры 188
10.2. Неравенство Коши — Буняковского 189
10.3. Неравенство треугольника 190
10.4. Независимость попарно ортогональных векторов 190
10.5. Ортогональная проекция вектора на подпространство . 191
10.6. Ортогонализация базиса 194
10.7. Геометрическая интерпретация ортогональных матриц 196
10.8. Упражнения 198
Глава 11. Самосопряженные операторы 200
11.1. Сопряженность операторов в евклидовом пространстве 200
11.2. Собственные векторы самосопряженных операторов . . 201
11.3. Приведение квадратичной формы к каноническому виду 203
11.4. Упражнения 208
Глава 12. Аффинные пространства 210
12.1. Преобразование координат точки при замене системы координат 211
12.2. Линейные отображения 212
12.3. Линейные операторы, связанные с линейным отображением 212
12.4. Аффинные и изометрические отображения 213
12.5. Изображения пространственных фигур 216
12.6. Упражнения 220
Глава 13. Исследование кривых второго порядка 221
13.1. Классификация кривых второго порядка 221
13.2. Инварианты уравнения второго порядка 223
13.3. Эллипс, гипербола и парабола в канонических системах координат 225
13.4. Центры и оси симметрии кривой второго порядка . . . 231
13.5. Построение канонической системы координат и канонического уравнения 234
13.6. Формулы связи исходной и канонической систем координат 236

13.7. Пример исследования кривой второго порядка 240
13.8. Упражнение 243
Глава 14. Поверхности второго порядка 244
14.1. Классификация поверхностей второго порядка 248
14.2. Эллипсоиды, гиперболоиды и параболоиды в канонических системах координат 250
14.3. Упражнения 252
Глава 15. Векторы, матрицы и квадратичные формы в математическом анализе 254
15.1. Производная и дифференциал векторной функции . . 255
15.2. Производная композиции дифференцируемых функций 262
15.3. Градиент, касательные и нормали 264
15.4. Формула Тейлора 268
15.5. Локальные экстремумы числовых функций многих переменных 273
15.6. Теорема о неявной функции 276
15.7. Условные экстремумы 280
15.7.1. Необходимое условие экстремума. Принцип множителей Лагранжа 280
15.7.2. Достаточные условия экстремума. Окаймленный гессиан 284
15.8. Условия зависимости системы числовых функций . . . 289
15.9. Упражнения 291
Глава 16. Комплексные числа и многочлены 294
16.1. Основные операции над комплексными числами 294
16.2. Свойства некоторых функций комплексного переменного 299
16.3. Рациональные функции 300
16.4. Унитарные пространства 308
16.5. Линейные дифференциальные уравнения 314
16.6. Методы решения линейных разностных уравнений . . . 335
16.7. Упражнения 340
Глава 17. Неотрицательные матрицы 345
17.1. Модель Леонтьева 345
17.2. Критерий продуктивности 346
17.3. Критерий прибыльности 349
17.4. Теорема Перрона — Фробениуса 351
17.5. Упражнения 354

Глава 18. Задача линейного программирования 355
18.1. Примеры задач, моделью которых является задача ЛП 356
18.2. Геометрический метод решения задачи ЛП 358
18.3. Идея симплекс-метода 363
18.4. Симплекс-метод 371
18.4.1. Поиск начального опорного плана. M-задача . . 377
18.5. Двойственные задачи 383
18.6. Метод потенциалов для решения транспортной задачи 392
18.7. Упражнения 400
Ответы к упражнениям 403
Литература 415
Предметный указатель 417

Список обозначений

$x \in X$ — элемент x принадлежит множеству X

$x \notin X$ — элемент x не принадлежит множеству X

$\emptyset$ — пустое множество

$A \bigcup B$ — объединение множеств A и B

$A \bigcap B$ — пересечение множеств A и B

$A \setminus B$ — разность множеств A и B

$A \subset B$ — множество A содержится в множестве B

$A \times B$ — декартово произведение множеств A и B

$\{x \in A \colon P(x)\}$ — множество элементов $x \in A$, обладающих свойством $P(\cdot)$

$\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ — множество, состоящее из элементов $x_1, \dots, x_n, \dots$

$f \colon X \to Y$ — отображение f множества X в множество Y (иначе говоря, функция f с областью определения X, принимающая значения во множестве Y)

$f \colon x \mapsto y$ — отображение (функция) f сопоставляет элементу x элемент y

$f(A) = \{y \in Y \colon y = f(x), x \in A\}$ — образ множества A при отображении $f \colon X \to Y$

$\operatorname{Im} f$ — множество значений $f(X)$ отображения $f \colon X \to Y$

$f^{-1}(B) = \{x \in X \colon f(x) \in B\}$ — прообраз множества $B \subset Y$ при отображении $f \colon X \to Y$

$g \circ f$ — композиция отображений f и g: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ — множество всех натуральных чисел

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ — множество всех целых чисел

$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \colon x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}\}$ — множество всех рациональных чисел

$\mathbb{R}$ — множество всех вещественных (действительных) чисел

$\mathbb{C}$ — множество всех комплексных чисел

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \colon x_i \in \mathbb{R}\}$ — множество всех n-мерных строк

$x = (x_1, \dots, x_n)$ — координатная запись точки n-мерного пространства

$\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x_i \geq 0\}$ — множество всех неотрицательных n-мерных строк

$\mathbb{R}^n_{++} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x_i > 0\}$ — множество всех положительных n-мерных строк

$\sup A$, $\inf A$ — верхняя и нижняя грани числового множества A

V^2 и V^3 — множества всех геометрических векторов на плоскости и в пространстве с обычными операциями над векторами

$P_n\,[x]$ — множество всех многочленов переменной x степени не выше n с обычным сложением и умножением на числа

$C\,[a, b]$ — множество всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с обычным сложением и умножением на числа

$D\,[a, b]$ — множество всех дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций с обычными операциями

$R\,[a, b]$ — множество всех интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$ функций с обычными операциями

$C(X, Y)$ — множество непрерывных на X функций со значениями в Y

$C(X)$ — множество непрерывных на X функций с числовыми значениями

$C^k(X, Y)$ — множество функций со значениями в Y, обладающих в точках множества X непрерывными производными k-го порядка

C^k — краткое обозначение $C^k(X, Y)$

$C^\infty(X, Y)$ — множество функций со значениями в Y, обладающих в точках множества X производными любого порядка

C^∞ — краткое обозначение $C^\infty(X, Y)$

$|x|$ — абсолютная величина числа или норма элемента евклидова пространства

$\langle x, y\rangle$ — скалярное произведение элементов евклидова пространства

$x \perp y$ — ортогональные векторы

$x^-_M \in M$ и $x^\perp_M \perp M$ — ортогональная проекция и ортогональная составляющая вектора x при проецировании на подпространство M

$[a, b]$ — векторное произведение векторов пространства

$\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ — вещественная и мнимая часть комплексного числа z

$\arg z$ — аргумент комплексного числа z

$\operatorname{Lin}(a_1, \ldots, a_n)$ — линейная оболочка системы векторов $a_1, \ldots, a_n$

$V_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x - x_0| < \delta\}$ — окрестность точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ заданного радиуса $\delta > 0$

$\overset{\circ}{V}_\delta(x_0) = V_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon 0 < |x - x_0| < \delta\}$ — проколотая окрестность точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ заданного радиуса $\delta > 0$

$V_\delta(\infty) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| > \delta\}$ — окрестность бесконечности заданного радиуса $\delta > 0$

$\operatorname{sgn}(x)$, $\lfloor x\rfloor$, $\lceil x\rceil$ — функции знак числа x (сигнум x), целочисленное округление x снизу, целочисленное округление x сверху

$n!$ — факториал, $0! = 1$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ при $n \in \mathbb{N}$

C_n^k — биномиальный коэффициент, $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

$A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$ — конъюнкция, дизъюнкция, импликация (логическое следование), эквиваленция (равносильность) высказываний A и B

$H_f(x)$ — матрица Гессе функции f в точке x

$x \to x_0$, $x \to \infty$ — базы множеств в $\mathbb{R}^n$

$x \to x_0-$, $x \to x_0+$, $x \to -\infty$, $x \to +\infty$ — базы множеств в $\mathbb{R}$

$n \to \infty$ — база множеств в $\mathbb{N}$

$\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = L$ — предел функции f по базе $\mathcal{B}$ равен L

$f = O(g)$ по базе $\mathcal{B}$ — f есть «о большое» от g по базе $\mathcal{B}$

$f \asymp g$ по базе $\mathcal{B}$ — f и g функции одного порядка по базе $\mathcal{B}$

$f = o(g)$ по базе $\mathcal{B}$ — f есть «о малое» от g по базе $\mathcal{B}$

$f \sim g$ по базе $\mathcal{B}$ — функция f эквивалентна функции g по базе $\mathcal{B}$

$f'(x_0)$, $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ — производная функции f в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, производная слева, производная справа

$A^{(j)}$ — j-й столбец матрицы A

A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A

A^T — транспонированная матрица A

A^* — эрмитово сопряженная матрица A

$\det A$ или $|A|$ — определитель матрицы A

A^{-1} — матрица, обратная к матрице A

$\operatorname{rang} A$ — ранг матрицы A

$\operatorname{rang}(a_1, \ldots, a_n)$ — ранг системы векторов $a_1, \ldots, a_n$

$\dim L$ — размерность линейного пространства L

$\ker \varphi$, $\operatorname{Im} \varphi$ — ядро и множество значений линейного оператора φ

$\exists x :$ — существует такое x, что ...

$\forall x \ldots$ — для любого x ...

$x = f^{-1}(y)$ — функция, обратная для функции $y = f(x)$

$\overline{AB}$ — вектор с началом в точке A и концом в точке B

$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — векторы единичной длины, указывающие положительное направление осей координат

$\square$ — конец доказательства

От авторов

Структура, содержание и весь замысел данного учебника основаны на опыте преподавания курсов линейной алгебры, математического анализа и дифференциальных уравнений для студентов экономического факультета Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ) и отражают прежде всего пожелания редакции издательства «Юрайт».

Первые 12 глав соответствуют программе курса «Линейная алгебра» для направления подготовки бакалавров по специальности 080100.62 «Экономика», разработанной на экономическом факультете НИУ ВШЭ с учетом требований Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования (ФГОС ВПО) по направлению подготовки «Экономика».

Остальные 6 глав содержат представляющие самостоятельный интерес различные приложения линейной алгебры, демонстрирующие применение методов линейной алгебры для постановки и решения принципиальных задач теории кривых и поверхностей второго порядка, многомерного математического анализа, дифференциальных и разностных уравнений, некоторых разделов экономической теории.

Главы 16 «Комплексные числа и многочлены» и 18 «Задача линейного программирования» включены по рекомендации издательства. В НИУ ВШЭ комплексные числа преподаются в курсе дифференциальных и разностных уравнений, а линейное программирование является естественным начальным разделом курса «Методы оптимальных решений».

Приведем далее фрагмент программы курса «Линейная алгебра» (программа разработана одним из авторов).

Цели и задачи дисциплины

1. Добиться усвоения студентами теоретических основ, базовых результатов и теорем аналитической геометрии и линейной алгебры, а также основных математических приемов и правил формального анализа и решения различных математических задач на основе полученных теоретических знаний.

2. Подготовить слушателей к чтению современных текстов по экономической теории, насыщенных векторными, матричными и операторными обозначениями.

3. Обеспечить запросы других разделов математики, использующих возникающие в линейной алгебре конструкции.

4. Научить слушателей давать геометрическую интерпретацию многомерным объектам и строить аналитическое описание геометрических соотношений.

5. Продемонстрировать возможность бескоординатного описания линейных и квадратичных функций, подготавливая переход к изучению функционального анализа.

6. Выработать у слушателей навыки решения типовых задач, способствующих усвоению основных понятий, а также задач, способствующих развитию начальных навыков научного исследования.

7. Развить умение логически мыслить, оперировать с абстрактными объектами и быть корректным в употреблении математических понятий и символов для выражения количественных и качественных отношений.

Место дисциплины в структуре ООП

1. Учебная дисциплина «Линейная алгебра» входит в цикл общих математических и естественно-научных дисциплин.

2. Требования к входным знаниям и умениям студентов — не предполагается какой бы то ни было предварительной математической подготовки сверх обычной программы средней школы.

3. Данная дисциплина является предшествующей для следующих дисциплин: «Эконометрика», «Математический анализ», «Микроэкономика», «Макроэкономика», «Дифференциальные и разностные уравнения», «Дискретные математические модели», «Методы оптимальных решений».

Требования к результатам освоения дисциплины

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих профессиональных компетенций: ПК-2, ПК-3, ПК-5, ПК-14, ПК-15.

В результате изучения дисциплины студент должен:
знать

1) точные формулировки основных понятий, возможности интерпретации их на простых модельных примерах, в том числе с использованием координатного, векторного, матричного или операторного способа записи математических соотношений;

2) общие теоремы о структуре множества решений систем линейных, специальные методы построения таких решений;

3) свойства основных числовых характеристик матриц: определитель, ранг, размерность пространства строк и столбцов;

уметь

1) формулировать и доказывать основные результаты этих разделов; представлять математические утверждения и их доказательства, проблемы и их решения ясно и точно в терминах, понятных для профессиональной аудитории, как в письменной, так и устной форме;

2) усваивать разделы учебной и научной литературы, связанные с применением линейных пространств, линейных отображений, линейных, билинейных и квадратичных форм;

владеть

навыками решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала; решения математических задач, аналогичных ранее изученным.

В учебнике представлен не только расширенный конспект наших лекций. В первых 12 главах читатели найдут тщательно прокомментированные примеры решения задач, обычно предлагаемых нами на семинарах, а также в домашних, контрольных и экзаменационных работах. В конце каждой главы учебника приводятся упражнения для самостоятельного решения, в конце учебника даны ответы ко всем упражнениям.

Курс линейной алгебры начинает преподаваться с 1 сентября, когда никаких серьезных экономических моделей и, вообще, никаких разделов экономической теории студентами еще не пройдено. До исследования функций многих переменных математический анализ подходит ближе к Новому году. Поэтому базовые разделы линейной алгебры естественно преподавать без игрушечных «экономических» примеров и без опережающего экономическую теорию рассмотрения, скажем, балансовых экономических моделей. Поэтому мы дополняем последовательное изложение понятий и методов собственно линейной алгебры отдельными дополнительными главами с приложениями линейной алгебры к многомерному математическому анализу, дифференциальным и разностным уравнениям, к некоторым разделам экономической теории. Здесь же появляются комплексные числа (в базовой части курса все линейные пространства рассматриваются только с умножением на вещественные числа) и вводятся эрмитовы билинейные и квадратичные формы, унитарные пространства.

Главы о кривых и поверхностях второго порядка, линейном программировании, неотрицательных матрицах служат естественным продолжением базовой линейной алгебры с элементами аналитической геометрии, так как основные задачи здесь формулируются и исследуются с помощью развитых ранее понятий и методов линейной алгебры. Многомерный математический анализ образуется в результате распространения с помощью линейной алгебры основополагающих идей одномерного математического анализа на случай векторных функций векторного аргумента. При этом многое удается перенести без изменения привычной формы записи. Например, правило дифференцирования композиции векторных функций имеет знакомый нынешним школьникам вид, только производные участвующих в композиции функций являются матрицами и правило содержит произведение таких матриц.

Записанный в векторно-матричной форме многомерный аналог формулы Тейлора позволяет выделить роль квадратичных форм в достаточных условиях локального экстремума функций многих переменных. Теорема о неявной функции для векторных уравнений является обоснованием одного из самых востребованных экономической теорией метода множителей Лагранжа в задаче об условном экстремуме, многократно возникающей в курсе микроэкономики.

Мы перенесли в настоящую книгу некоторые фрагменты наших учебников [6, 7]. В главах учебника, в которых приводятся начальные сведения о системах линейных уравнений и определителях матриц, как и раньше, мы придерживаемся подхода Л. А. Скорнякова [14]. Отличительная черта этого подхода — центральная роль элементарных преобразований матриц. Большинство учебных задач курса линейной алгебры можно решить с помощью элементарных преобразований матриц. Изучение численных методов линейной алгебры требует значительных дополнительных ресурсов времени и соответственно особого учебного курса. В данном учебнике вопросы вычислительной линейной алгебры практически не рассматриваются. Показано лишь, что метод Гаусса предполагает значительно меньше арифметических операций по сравнению с методом Крамера.

В главе «Элементы аналитической геометрии» используется предложенный А. В. Погореловым [11] метод раннего введения координат геометрических векторов еще до определения арифметических операций над векторами. Эта идея, вошедшая в школьные учебники геометрии, позволяет ввести все операции над векторами через их координаты с последующей геометрической интерпретацией этих операций, включая скалярное, векторное и смешанное произведения векторов.

Для улучшения восприятия текста читателями мы решили совсем не нумеровать формулы. Нумеруются только утверждения некоторых теорем и сами теоремы. В учебнике немало рисунков, все они приводятся без номеров и подписей, поскольку сопровождаются, а часто просто обтекаются поясняющим текстом.

Авторы

Глава 1

Преобразования матриц и системы линейных уравнений

1.1. Элементарные преобразования матриц

Обозначим через $\mathbb{R}^n$ множество всех строк из n действительных чисел, т. е. $\mathbb{R}^n = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \colon x_i \in \mathbb{R} \}$. В частности, при $n=1$ получим $\mathbb{R}^1$ — множество всех вещественных чисел, при $n = 2$ получим $\mathbb{R}^2$ — множество всех пар вещественных чисел.

Строки $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ считаются *равными*, если $a_i = b_i$ для всех i, т. е. равны все их *компоненты*.

Определим на множестве $\mathbb{R}^n$ операции сложения строк и умножения строки на действительное число по следующим правилам:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n);$$

$$\lambda(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n).$$

Строка, состоящая из одних нулей, называется *нулевой* и обозначается через 0. Легко проверяется справедливость следующих свойств операций над строками:

1) $a + b = b + a$;
2) $(a + b) + c = a + (b + c)$;
3) $a + 0 = a$;
4) уравнение $a + x = 0$ разрешимо для любого a;
5) $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$;
6) $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$;

7) $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$;
8) $1a = a$.

Здесь латинские буквы означают произвольные строки из $\mathbb{R}^n$, греческие — произвольные вещественные числа. Знак «+» в левой части равенства 6 означает сложение чисел, а в правой части — сложение строк. В равенстве 7 в выражении $(\lambda\mu)$ — обычное умножение чисел.

Докажем, например, равенство $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$. С этой целью заметим, что i-ми компонентами строк, стоящих в левой и правой частях этого равенства, являются $\lambda(a_i + b_i)$ и $\lambda a_i + \lambda b_i$ соответственно, и их совпадение вытекает из справедливости закона дистрибутивности для действительных чисел.

Матрицей размера $m \times n$ называется таблица, составленная из m записанных одна под другой n-мерных строк

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

В частности, при $m = 1$ получается матрица-строка, при $n = 1$ — матрица-столбец.

В случае $m = n$ матрица называется *квадратной матрицей порядка* n. Матрица, состоящая из нулевых строк, называется *нулевой* и обозначается через O, а матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

— *единичной*. Подчеркнем, что для каждого числа n существует своя единичная матрица, а для каждого размера $m \times n$ — своя нулевая матрица. Две матрицы считаются *равными*, если они имеют одинаковые размеры и их элементы, стоящие на соответствующих местах, совпадают.

В дальнейшем элементы матрицы, обозначенной некоторой прописной буквой (скажем, A), будем, как правило, без специальных оговорок обозначать соответствующей строчной буквой с индексами (в нашем случае a_{ij}), указывающими номер строки и столбца соответственно. Строку матрицы с номером i будем часто обозначать через a_i, а столбец с номером j — через $A^{(j)}$.

Любая система линейных уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

однозначно определяется матрицей

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

которая называется *расширенной матрицей системы*. Матрица, стоящая левее вертикальной черты, называется *матрицей системы*.

Строка $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ считается *решением* выписанной выше системы, если для всех i справедливы числовые равенства $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n = b_i$.

Решить систему — значит определить множество всех ее решений. Если множество решений пусто, то система уравнений называется *несовместной*.

В дальнейшем кроме вышеописанной формы записи системы линейных уравнений будут использованы еще две: векторная и матричная. *Векторная запись*

$$x_1 A^{(1)} + x_2 A^{(2)} + \dots + x_n A^{(n)} = b,$$

где $A^{(j)}, j = 1, \dots, n$ — столбцы матрицы системы, b — столбец из правых частей уравнений.

Таким образом, задача о решении системы линейных уравнений может рассматриваться как задача о разложении вектора b по векторам $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$ (выражение «разложить вектор по векторам из данной системы векторов» означает то же, что и «представить вектор в виде линейной комбинации векторов из данной системы векторов».

Матричная запись $AX = B$ системы линейных уравнений, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

получится в результате подходящего определения операции умножения матриц (см. гл. 4).

Пример 1.1. Систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

можно представить в векторной форме

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и матричной форме

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Две системы линейных уравнений называются *эквивалентными*, если всякое решение первой системы является решением второй системы, и наоборот. Поэтому вместо данной системы можно решать ей эквивалентную.

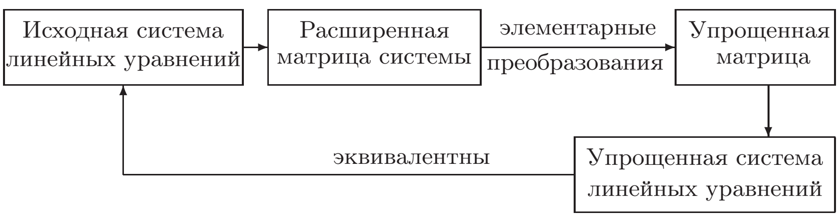
Элементарными преобразованиями будем называть следующие преобразования матриц:

1) перемена местами двух строк матрицы (I тип);
2) прибавление к какой-либо строке матрицы другой ее строки, умноженной на некоторое число (II тип);
3) умножение некоторой строки на отличное от нуля число (III тип).

1.2. Метод Гаусса

С помощью элементарных преобразований, как будет показано далее, могут быть решены многие задачи линейной алгебры. Укажем прежде всего на знаменитый метод решения произвольных систем линейных уравнений — метод Гаусса.

Схема метода Гаусса приведена ниже. Компоненты схемы и первые примеры использования метода Гаусса рассматриваются в последующих подразделах данной главы.



Доказательство многих теорем курса основано на применении метода (принципа) *математической индукции.* Приведем схему этого метода.

Пусть $\mathbb{N}$ *— множество всех натуральных чисел* $1, 2, 3, \ldots$; M *— некоторое его подмножество, о котором известно, что* $1 \in M$ *и если* $m \in M$, *то* $m + 1 \in M$. *Тогда* $M = \mathbb{N}$.

При некоторых подходах к построению арифметики метод математической индукции является теоремой, при других подходах — это аксиома. Мы не будем приближаться к основаниям арифметики, выяснять, в силу чего истинна схема метода математической индукции.

Пусть m — натуральное число, входящее в формулировку некоторой теоремы. Если теорема верна при $m = 1$ и из справедливости теоремы для некоторого m всегда следует ее справедливость для $(m + 1)$, то теорема верна для всех натуральных чисел. Именно в такой форме, как правило, применяется метод математической индукции. Здесь $M = \{m \in \mathbb{N}\colon$ для m теорема верна$\}$.

Теорема 1.1 (об обратимости элементарных преобразований). *Если матрица* A' *получается из матрицы* A *с помощью конечного числа элементарных преобразований, то и наоборот, матрицу* A *можно получить из матрицы* A' *с помощью конечного числа элементарных преобразований.*

Доказательство. Пусть t — число элементарных преобразований, примененных к A при переходе к A'. Проведем доказательство индукцией по t.

Пусть $t = 1$, т.е. проделано только одно преобразование.

Если это преобразование I типа, т.е. переставлены две строки, то, переставляя эти строки еще раз, придем от A' к A.

Если это преобразование II типа, то

$$(i\text{-я строка } A') = (i\text{-я строка } A) + \lambda(j\text{-я строка } A)$$

и тогда

$$(i\text{-я строка } A) = (i\text{-я строка } A') + (-\lambda)(j\text{-я строка } A').$$

Если это преобразование III типа, то умножением на обратное число можно перейти от A' к A.

Пусть теперь известно, что теорема справедлива для некоторого $t \geq 1$, а от A к A' можно перейти за $(t + 1)$ элементарных преобразований.

Обозначим через C матрицу, получаемую из A после первого преобразования. В силу индуктивного предположения, используя элементарные преобразования, можно перейти от A' к C, а как установлено в начале доказательства, точно так же можно перейти и от C к A.

$$A \xleftrightarrow[\text{случай } t=1]{\text{первое преобразование}} C \xleftrightarrow[\text{по предположению индукции}]{\text{последние } t \text{ преобразований}} A'.$$

Таким образом, применение элементарных преобразований позволяет перейти от A' к A, что завершает доказательство. $\square$

Теорема 1.2 (об эквивалентности систем линейных уравнений). *Пусть $\bar{A}$ и $\bar{A}'$ — расширенные матрицы систем линейных уравнений. Если матрицу $\bar{A}'$ можно получить из матрицы $\bar{A}$ с помощью конечного числа элементарных преобразований, то соответствующие системы линейных уравнений эквивалентны.*

Доказательство. Достаточно проверить, что всякое решение системы с расширенной матрицей $\bar{A}$ является решением системы с расширенной матрицей $\bar{A}'$, так как в силу теоремы 1.1 будет верно и обратное.

Пусть t — число элементарных преобразований, примененных к $\bar{A}$ при переходе к $\bar{A}'$.

При $t = 1$, если это преобразование I типа, то в соответствующей системе только поменяются местами два уравнения. Конечно, старые решения по-прежнему будут им удовлетворять. При элементарных преобразованиях II типа к i-й строке прибавляется j-я строка, умноженная на λ. Следовательно, i-я строка матрицы $\bar{A}'$ имеет вид $(a_{i1} + \lambda a_{j1}, \ldots, a_{in} + \lambda a_{jn}, b_i + \lambda b_j)$. Пусть $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — решение системы с расширенной матрицей $\bar{A}$. Будет ли оно решением системы с расширенной матрицей $\bar{A}'$? Сомнение может вызвать только i-е уравнение этой системы. Но $(a_{i1} + \lambda a_{j1})\alpha_1 + \cdots + (a_{in} + \lambda a_{jn})\alpha_n =$ $= (a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n) + \lambda(a_{j1}\alpha_1 + \cdots + a_{jn}\alpha_n) = b_i + \lambda b_j$.

Случай преобразования III типа рассматривается аналогично.

Завершение доказательства теоремы 1.2 можно провести, как и при доказательстве теоремы 1.1. $\square$

Пример 1.2. Применим метод Гаусса для решения системы линейных уравнений из примера 1.1.

Будем добиваться появления после элементарных преобразований среди столбцов расширенной матрицы системы столбцов, напоминающих столбцы единичной матрицы. Все элементы таких столбцов, кроме одного, равны нулю. Это означает, что соответствующая данному столбцу коэффициентов неизвестная входит реально только в одно уравнение системы. В связи с этим метод Гаусса часто называют *методом последовательного исключения неизвестных.*

Построение очередного из таких столбцов описывает следующая инструкция.

- Выбираем в рассматриваемой матрице системы какой-нибудь ненулевой элемент в тех строках, в которых ранее не выбирался разрешающий элемент, называем этот элемент разрешающим элементом и обводим его кружочком. Строку и столбец расширенной матрицы системы, содержащие разрешающий элемент, называем разрешающей строкой и разрешающим столбцом.

- Начинаем заполнять новую расширенную матрицу системы с переписывания разрешающей строки без каких-либо изменений.

- Остальные строки новой матрицы получаем из строк текущей матрицы в результате прибавления к каждой из строк умноженной на подходящее число разрешающей строки так, чтобы в разрешающем столбце новой строки получился нулевой элемент. Тем самым если разрешающий элемент a_{rk}, а обрабатывается строка a_i, то происходит элементарное преобразование II типа $a_i \mapsto a_i + \left(-\frac{a_{ik}}{a_{rk}}\right) a_r$.

В результате первого применения инструкции получается первый «разреженный» столбец.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -1 & -5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

Теоретически можно было на первом шаге выбрать любой элемент матрицы системы в качестве разрешающего, поскольку все они не равны нулю. Вычислительная машина выбрала бы максимальный по абсолютной величине элемент $a_{21} = 3$, так как на пути к ответу предстоит деление на этот элемент. Поскольку компьютер вынужден прибегать к округлению результатов арифметических действий, то образуется и может накапливаться ошибка округления, а деление на достаточно большое число уменьшает (по крайней мере сдерживает рост) итоговую ошибку округления. В учебных задачах небольшой размерности с целыми коэффициентами можно не пользоваться округлением. Поэтому разрешающий элемент желательно брать минимальным по абсолютной величине среди ненулевых элементов тех столбцов, где еще не выбирался разрешающий элемент.

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

Если встречается целочисленная строка расширенной матрицы системы с общим делителем, то стоит поделить строку на общий делитель (преобразование III типа).

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow$$

После того как не осталось ненулевых строк, в которых еще не выбирался разрешающий элемент, элементарные преобразования прекращаются и записывается соответствующая последней матрице упрощенная система линейных уравнений.

$$\longrightarrow \begin{cases} \qquad\qquad -x_3 = 3, \\ \qquad x_2 \qquad = -1, \\ x_1 \qquad\qquad = 2. \end{cases}$$

Вывод: система имеет единственное решение $X = (2, -1, -3)$.

Если неизвестных больше, чем уравнений, то, как будет показано далее, система либо имеет бесконечное множество решений, либо несовместна. Единственного решения в таких случаях быть не может.

1.3. Приведение матрицы к ступенчатому виду

Упрощенная матрица в схеме метода Гаусса — это матрица, многие элементы которой равны нулю.

Ступенчатой называется матрица, обладающая следующими свойствами:

1) если i-я строка нулевая, то $(i+1)$-я строка также нулевая;
2) если первые ненулевые элементы i-й и $(i+1)$-й строк расположены в столбцах с номерами k_i и k_{i+1} соответственно, то $k_i < k_{i+1}$.

Наглядно эти свойства означают, что ниже нулевой строки могут располагаться лишь нулевые строки, а все элементы, располагающиеся влево и вниз от первого ненулевого элемента какой-либо строки, являются нулями. Происхождение названия нетрудно объяснить, рассматривая, например, ступенчатую матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 & 2 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{array}{l} k_1 = 3, \\ k_2 = 5, \\ k_3 = 6, \\ k_4 = 7. \end{array}$$

Теорема 1.3 (о приведении матрицы к ступенчатому виду). *Всякую матрицу конечным числом элементарных преобразований* I *и* II *типа можно превратить в ступенчатую матрицу.*

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по числу строк матрицы, т. е. здесь m из принципа математической индукции — число строк матрицы.

Если имеется всего одна строка ($m = 1$), то матрица уже ступенчатая, ибо оба условия, входящие в определение ступенчатой матрицы, выполнены тривиальным образом ввиду отсутствия второй строки.

Пусть теперь известно, что теорема верна для матриц из m строк, матрица A содержит $(m+1)$ строку.

Если $A = O$, то она ступенчатая. Если A ненулевая, то в ней есть ненулевые элементы. Выберем среди них элемент, располагающийся в столбце с наименьшим номером, скажем, с номером k_1. Применив преобразование первого типа, перенесем строку с этим элементом на первое место. Тогда матрица примет вид

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{1k_1} & \dots \\ 0 & \dots & 0 & b_{2k_1} & \dots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & \dots & 0 & b_{m+1,k_1} & \dots \end{pmatrix},$$

причем $b_{1k_1} \neq 0$. Теперь будем применять преобразования второго типа: ко второй строке прибавим первую, умноженную на $-b_{2k_1}/b_{1k_1}$, к третьей строке — первую, умноженную на $-b_{3k_1}/b_{1k_1}$, и т.д. После применения m таких элементарных преобразований добьемся того, что в k_1-м столбце всюду, кроме первой строки, будут нули

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{1k_1} & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} & \boxed{D} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \end{pmatrix}.$$

Отбросим первую строку. Оставшаяся матрица имеет m строк. По индуктивному предположению ее можно привести к ступенчатому виду $G = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} & \boxed{S} \\ 0 & \dots & 0 & \end{pmatrix}$. Но осуществляя элементарные преобразования уменьшенной матрицы, можно считать, что мы делаем элементарные преобразования матрицы C, не использующие первой строки.

Таким образом, мы получим матрицу $H = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{1k_1} & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} & \boxed{S} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \end{pmatrix}$, которая, как нетрудно проверить, является ступенчатой матрицей. $\square$

Из теорем 1.2, 1.3 следует, что для нахождения решений любой системы линейных уравнений достаточно уметь находить решения систем линейных уравнений со ступенчатой матрицей системы.

Теорема 1.4 (о системах уравнений со ступенчатой расширенной матрицей системы). *Пусть r — число ненулевых строк, а $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$ — номера первых ненулевых элементов строк расширенной матрицы $\bar{A}$ системы линейных уравнений относительно n неизвестных, приведенной к ступенчатому виду. Тогда:*

1) *если $k_r = n + 1$, то система решений не имеет;*
2) *если $k_r \neq n + 1$, то:*
   а) *если $r = n$, то система имеет единственное решение;*
   б) *если $r < n$, то система имеет бесконечное множество решений. Неизвестные $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_r}$ (главные неизвестные) однозначно выражаются через остальные (свободные) неизвестные, которые могут принимать произвольные значения.*

Доказательство. В случае $k_r = n + 1$ система содержит уравнение $0x_1 + \cdots + 0x_n = b_r$, где $b_r \neq 0$, которое не имеет решений.

Если $k_r \leq n,\ r = n$, то $k_1 = 1, k_2 = 2, \ldots, k_n = n$ и система имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

причем $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ отличны от нуля. Поскольку $a_{nn} \neq 0$, из последнего уравнения однозначно определяется x_n. После этого предпоследнее уравнение позволяет однозначно определить x_{n-1} и т.д. Таким образом, в данном случае система имеет единственное решение.

Предположим теперь, что есть свободные неизвестные. Обозначим через L_i сумму свободных неизвестных, умноженных на стоящие перед ними коэффициенты i-го уравнения, и, перенося свободные переменные в правую часть, придем к системе

$$\begin{cases} a_{1,k_1}x_{k_1} + a_{1,k_2}x_{k_2} + \cdots + a_{1,k_r}x_{k_r} = b_1 - L_1, \\ \qquad\qquad a_{2,k_2}x_{k_2} + \cdots + a_{2,k_r}x_{k_r} = b_2 - L_2, \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{r,k_r}x_{k_r} = b_r - L_r\,, \end{cases}$$