



ИНСТИТУТ ЭКОНОМИКИ  
И ПРЕДПРИНИМАТЕЛЬСТВА

**А. М. Попов, В. Н. Сотников**

# **ЭКОНОМИКО- МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ**

**УЧЕБНИК ДЛЯ ПРИКЛАДНОГО БАКАЛАВРИАТА**

2–е издание, исправленное и дополненное

Под редакцией **А. М. Попова**

*Рекомендовано Учебно–методическим отделом  
высшего образования в качестве учебника  
для студентов высших учебных заведений, обучающихся  
по экономическим направлениям и специальностям*

**Книга доступна в электронной библиотечной системе  
[biblio-online.ru](http://biblio-online.ru)**

**Москва ■ Юрайт ■ 2014**

УДК 51(075.8)  
ББК 22.1я73  
П58

**Авторы:**

**Попов Александр Михайлович** — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой математики и математических методов в экономике Института экономики и предпринимательства;

**Сотников Валерий Николаевич** — кандидат технических наук, доцент, профессор кафедры математики и математических методов в экономике Института экономики и предпринимательства.

**Рецензенты:**

*Гатаулин А. М.* — доктор экономических наук, профессор, член-корреспондент РАСХН;

*Струнков С. П.* — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник НИИ системных исследований РАН.

**Попов, А. М.**

П58 Экономико-математические методы и модели : учебник для прикладного бакалавриата / А. М. Попов, В. Н. Сотников ; под ред. А. М. Попова. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2014. — 479 с. — Серия : Бакалавр. Прикладной курс.

ISBN 978-5-9916-4354-2

Данный учебник является частью обучающего комплекса, в который также входят книги А. М. Попова и В. Н. Сотникова «Высшая математика для экономистов» и «Теория вероятностей и математическая статистика».

Учебник подготовлен в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования четвертого поколения по дисциплине «Математика» для экономических специальностей. В нем изложены основные разделы математических методов и моделей в экономике в соответствии с дидактическими блоками Госстандарта.

*Для студентов и аспирантов экономических направлений и специальностей.*

УДК 51(075.8)  
ББК 22.1я73

© Попов А. М., Сотников В. Н., 2011  
© Попов А. М., Сотников В. Н., 2012,  
с изменениями

ISBN 978-5-9916-4354-2

© ООО «Издательство Юрайт», 2014

## Оглавление

Предисловие .....	6
Введение .....	7

### Раздел I ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

<b>Глава 1. Математическое программирование .....</b>	<b>11</b>
1.1. Постановка задачи линейного программирования .....	11
1.2. Графический метод решения задач линейного программирования .....	15
1.3. Симплекс-метод .....	21
1.4. Понятие о целочисленном программировании .....	32
1.5. Понятие о динамическом программировании .....	39
1.6. Нелинейное программирование .....	44
<i>Вопросы и задания для самоконтроля .....</i>	<i>46</i>
<i>Задачи для самостоятельного решения .....</i>	<i>47</i>
<b>Глава 2. Элементы математической теории оптимального управления .....</b>	<b>50</b>
2.1. Постановка задачи оптимального управления экономической системой .....	50
2.2. Принцип максимума Понтрягина .....	55
2.3. Транспортная задача .....	60
2.4. Двойственная задача .....	68
<i>Вопросы и задания для самоконтроля .....</i>	<i>72</i>
<i>Задачи для самостоятельного решения .....</i>	<i>72</i>
<b>Глава 3. Математические игры .....</b>	<b>73</b>
3.1. Игра как модель конфликтной ситуации в принятии решения .....	73
3.2. Матричные игры .....	74
3.3. Смешанные стратегии матричных игр .....	78
3.4. Биматричные игры .....	82
3.5. Кооперативные игры .....	86
3.6. Статистические игры. Принятие решения в условиях полной неопределенности .....	88
3.7. Принятие решения в условиях частичной неопределенности. Критерий Байеса .....	93
<i>Вопросы и задания для самоконтроля .....</i>	<i>94</i>
<i>Задачи для самостоятельного решения .....</i>	<i>94</i>

<b>Глава 4. Элементы теории массового обслуживания .....</b>	<b>96</b>
4.1. Основные понятия. Классификация систем массового обслуживания .....	96
4.2. Понятие марковского случайного процесса. Потоки событий .....	97
4.3. Уравнения Колмогорова. Предельные вероятности состояний .....	101
4.4. Процесс гибели и размножения .....	105
4.5. Системы массового обслуживания с отказами .....	107
4.6. Системы массового обслуживания с ожиданием .....	111
<i>Вопросы и задания для самоконтроля</i> .....	114
<i>Задачи для самостоятельного решения</i> .....	115
<b>Глава 5. Элементы сетевого планирования и управления .....</b>	<b>116</b>
5.1. Сетевой график и его параметры .....	116
5.2. Правила построения сетевого графика .....	118
5.3. Расчет параметров сетевого графика .....	122
5.4. Линейный график и способы его построения .....	125
<i>Вопросы и задания для самоконтроля</i> .....	133
<b>Глава 6. Элементы теории нечетких множеств .....</b>	<b>134</b>
6.1. Нечеткие понятия .....	134
6.2. Операции над нечеткими множествами .....	136
6.3. Матрица инцидентий и нечеткие матрицы .....	140
6.4. Многокритериальный выбор альтернатив принятия решений .....	142
6.5. Приложения теории нечетких множеств к решению задач .....	144
6.6. Метод экспертных оценок .....	151
<i>Вопросы и задания для самоконтроля</i> .....	155
<i>Задачи для самостоятельного решения</i> .....	156
<b>Глава 7. Численные методы решения задач .....</b>	<b>157</b>
7.1. Численные методы дифференцирования .....	157
7.1.1. Устойчивость. Корректность. Сходимость .....	157
7.1.2. Понятие о приближении функций .....	158
7.2. Аппроксимация производных .....	165
7.3. Частные производные .....	167
7.4. Элементы разностных схем .....	169
7.4.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения .....	169
7.4.2. Дифференциальные уравнения с частными производными .....	181
7.5. Численные методы интегрирования .....	186
7.5.1. Формула прямоугольников .....	186
7.5.2. Формула трапеций .....	187
7.5.3. Формула парабол .....	188
<i>Вопросы и задания для самоконтроля</i> .....	192

## Раздел II ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

<b>Глава 8. Модели поведения потребителя .....</b>	<b>195</b>
8.1. Функция полезности. Кривые безразличия .....	195
8.2. Задача потребительского выбора. Кривые «доход-потребление» и «цена-потребление» .....	198
8.3. Функции спроса и предложения .....	205
8.4. Эластичность функции и ее свойства .....	211
8.5. Применение эластичности в экономике. Уравнение Слуцкого .....	214
8.6. Функции потребления и сбережения .....	220
8.7. Неравномерность распределения дохода населения .....	222
<i>Вопросы и задания для самоконтроля .....</i>	<i>223</i>
<i>Задачи для самостоятельного решения .....</i>	<i>224</i>
<b>Глава 9. Производственные модели .....</b>	<b>226</b>
9.1. Производственные функции .....	226
9.2. Издержки производства .....	230
9.3. Поведение фирмы в условиях совершенной конкуренции .....	235
9.4. Поведение фирмы в условиях несовершенной конкуренции .....	239
9.5. Прикладные задачи в экономике .....	242
<i>Вопросы и задания для самоконтроля .....</i>	<i>252</i>
<i>Задачи для самостоятельного решения .....</i>	<i>252</i>
<b>Глава 10. Общие модели экономики и управления.....</b>	<b>254</b>
10.1. Модели межотраслевого баланса. Модель Леонтьева .....	254
10.2. Линейная модель обмена .....	257
10.3. Общие модели развития экономики. Модель Солоу .....	259
<i>Вопросы и задания для самоконтроля .....</i>	<i>264</i>

## Раздел III ТЕСТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА»

<b>Предметный указатель .....</b>	<b>452</b>
<b>Ответы к задачам .....</b>	<b>456</b>
<b>Литература .....</b>	<b>458</b>
<b>Приложение. Краткий справочник по математике .....</b>	<b>460</b>

## Предисловие

Учебник подготовлен в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования (ФГОС ВПО) для бакалавров по дисциплинам математического и естественно-научного цикла.

Учебник может быть рекомендован и для экономических специальностей, как часть обучающего комплекса по дисциплине «Математика».

В заключительной части учебника приводятся тесты для самоконтроля по математическим дисциплинам, составленным на основе рекомендаций Национального аккредитационного агентства в сфере образования.

Главы 6, 7 ориентированы в основном на студентов для специальности «Прикладная информатика (в экономике)».

В конце каждой главы приводятся вопросы для самоконтроля, а также задачи для самостоятельного решения с ответами в конце книги.

Для углубленного изучения отдельных тем содержания книги приводится список литературы. В конце книги оформлен в виде приложений справочный материал по математическим формулам и физическим величинам.

Авторы считают своим долгом поблагодарить рецензентов: доктора экономических наук, профессора, члена-корреспондента РААСН А. М. Гатаулина (кафедра экономической кибернетики РГАУ—МСХА им. К. А. Тимирязева); доктора физико-математических наук, профессора С. П. Стрункова (НИИ системных исследований РАН), взявших на себя нелегкий труд рецензирования рукописи книги.

В совокупности с другими дисциплинами базовой части математического цикла ФГОС ВПО дисциплина «Экономико-математические методы и модели» обеспечивает инструментарий формирования профессиональных компетенций бакалавра.

При изучении дисциплины «Экономико-математические методы и модели» бакалавр должен:

- **знать** — основные понятия и инструменты математического моделирования; основные математические модели принятия решения; основные понятия и современные принципы работы с деловой информацией, а также иметь представление о корпоративных информационных системах и базах данных.
- **уметь** — решать типовые математические задачи, используемые при принятии управленческих решений; использовать математический язык и математическую символику при построении организационно-управленческих моделей; обрабатывать эмпирические и экспериментальные данные; применять информационные технологии для решения управленческих задач.
- **владеть** — математическими, статистическими и количественными методами решения типовых организационно-управленческих задач; программным обеспечением для работы с деловой информацией и основами интернет-технологий; навыками применения современного математического инструментария для решения экономических задач; методикой построения, анализа и применения математических моделей для оценки состояния и прогноза развития экономических явлений и процессов.

Учебник состоит из двух разделов, которые включают десять глав. В первом разделе «Экономико-математические методы» рассматриваются элементы математического программирования и математической теории оптимального управления. Даются основные понятия математических игр, элементов теории массового обслуживания, сетевого планирования и управления, теории нечетких множеств, изучаются численные методы решения задач. Во втором разделе «Экономико-математические модели» раскрыты модели поведения потребителя, производственные модели и общие модели экономики и управления.

## Введение

Современная математика характеризуется интенсивным использованием ее в различных науках. Во многом этот процесс происходит благодаря разделению последней на ряд самостоятельных областей. Математика стала для многих отраслей знаний не только инструментом количественного расчета, но также и методом точного исследования и средством формулировки задач исследования.

Экономика как наука об объективных причинах функционирования и развития общества пользуется разнообразными количественными характеристиками и математическими методами. В исследованиях современной экономики применяются различные оптимизационные методы, которые опираются на математическое программирование, теорию игр, сетевое планирование, теорию массового обслуживания и ряд других прикладных наук.

Современная экономическая теория включает как естественный, необходимый элемент математические модели и методы. Использование математики в экономике позволяет, во-первых, выделить и формально описать наиболее важные, существенные связи. Во-вторых, из четко сформулированных исходных данных и соотношений можно сделать выводы, адекватные изучаемому объекту в той же мере, что и выбранные предпосылки. В-третьих, методы математики позволяют индуктивным путем получать новые знания об объекте: оценить форму и параметры зависимостей его переменных, в наибольшей степени соответствующие имеющимся наблюдениям. В-четвертых, использование языка математики позволяет точно и компактно излагать положения экономической теории, формулировать ее понятия.

Математические методы и модели использовались еще в XVIII в. Основными работами в этот период явились «Экономическая таблица» (Ф. Кене), макроэкономическая модель экономики (А. Смит), модель международной торговли (Д. Риккардо).

В XIX в. большой вклад в моделирование рыночной экономики внесли математики Л. Вальрас, О. Курно, В. Парето и др. В XX в. математические методы моделирования применялись очень широко, с их использованием связаны практически все работы, удостоенные Нобелевской премии по экономике (Р. Солоу, В. Леонтьев, Л. Канторович и др.).

В России в начале XX в. большой вклад в математическое моделирование экономики внесли В. К. Дмитриев и Е. Е. Слуцкий. В 80-е гг. прошлого столетия экономико-математическое направление было связано в основном с попытками формально описать «систему оптимального функционирования социалистической экономики» (Н. П. Федоренко, С. С. Шаталин). В этот период были построены многоуровневые системы моделей народнохозяйственного планирования, оптимизационные модели областей и предприятий.

Математическая модель экономического объекта — это условный образ объекта, построенный для упрощения его исследования. Предполагается, что изучение модели дает новые решения в той или иной ситуации.

Можно выделить три этапа проведения математического моделирования в экономике:

1. Постановка цели и задачи исследования, качественное описание объекта в виде экономической модели.
2. Формулировка математической модели изучаемого объекта, выбор методов исследования. Исследование модели с помощью этих методов.
3. Обработка и анализ полученных результатов.

Математические модели, используемые в экономике, можно подразделить на классы по ряду признаков, относящихся к особенностям моделируемого объекта, цели моделирования и используемого инструментария: модели макро- и микроэкономические, теоретические и прикладные, оптимизационные и равновесные, статические и динамические.





Раздел I

**ЭКОНОМИКО-  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
МЕТОДЫ**





# Глава 1

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

### 1.1. Постановка задачи линейного программирования

Математическое программирование изучает задачи поиска экстремума функции нескольких переменных при наличии ограничений, наложенных на эти переменные. Сущность экстремальных задач состоит в том, чтобы из множества допустимых наборов значений выбрать оптимальный с данной точки зрения.

Если функция нескольких переменных и все ограничения являются *линейными* относительно этих переменных, то математическое программирование называется *линейным*.

**Математическая модель задачи линейного программирования** (ЗЛП) включает следующее.

1. Совокупность переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , каждый набор значений которых называется *планом* ЗЛП.

Очевидно, что план ЗЛП можно рассматривать как  $n$ -мерный вектор  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

2. Целевую функцию

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = Q(x) \rightarrow \text{extr},$$

которая позволяет выбирать оптимальный, т.е. наилучший план из множества возможных планов ЗЛП.

Наилучший план должен давать целевой функции экстремальное значение. В экономике целевая функция может представлять собой прибыль, издержки производства, объем реализации и т.п.

3. Систему ограничений на план ЗЛП, представленную в виде уравнений или неравенств. В экономике эти ограничения следуют, например, из имеющихся ресурсов, потенциальных возможностей оборудования и т.д.

Система ограничений дополняется требованием неотрицательности значений всех переменных.

Решения системы ограничений образуют *область допустимых решений* (планов) ЗЛП.

Допустимый план  $x^*$ , дающий целевой функции экстремальное (заданное в виде максимума или минимума) значение, называется *оптимальным планом* и является *решением ЗЛП*.

Выше указывалось, что в ЗЛП как целевая функция, так и ограничения являются линейными относительно переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

*Стандартной формой ЗЛП* называют ее следующую математическую форму:

$$Q = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max \quad (1.1)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2; \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \dots x_n \geq 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Если в равенстве (1.1) нужно искать не максимум, а минимум целевой функции  $Q(x)$ , то для записи ЗЛП в стандартной форме достаточно умножить это равенство на  $(-1)$  и искать  $\max(-Q(x))$ .

Действительно, план ЗЛП, придающий функции  $(-Q(x))$  максимальное значение, дает  $Q(x)$  минимальное значение. Если какие-то неравенства в системе ограничений имеют знак  $\geq$ , то их также нужно умножить на  $(-1)$ , чтобы получить знак  $\leq$ .

В свернутом виде с использованием символа суммирования стандартная форма ЗЛП имеет вид

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max; \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, \quad i = 1, \dots, m; \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Во многих случаях удобнее оказывается форма записи ЗЛП, в которой система ограничений представляет собой систему уравнений. Тогда можно использовать методы решения систем линейных алгебраических уравнений, известные из линейной алгебры.

Такую форму ЗЛП называют *канонической формой*. Она имеет вид

$$Q = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2; \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \dots x_n \geq 0. \end{aligned}$$

Чтобы перейти от стандартной формы ЗЛП к канонической, по количеству неравенств  $m$  вводят  $m$  дополнительных неотрицательных переменных

$$x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}.$$

Действительно, поскольку левые части неравенств из системы ограничений в стандартной форме (1.2) не больше правых, то добавление к левой части неравенства неотрицательной переменной позволяет перевести неравенство в уравнение.

Заметим, что количество введенных дополнительных переменных должно соответствовать количеству неравенств в системе ограничений.

Тогда ЗЛП, переведенная из стандартной формы в каноническую, принимает вид

$$Q = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + \dots + 0x_{n+m} \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} &= b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} &= b_2; \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} &= b_m; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \dots x_n \geq 0; x_{n+1} \geq 0; \dots x_{n+m} \geq 0, \end{aligned}$$

или в свернутой форме с использованием символов суммирования

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{j=1}^n c_jx_j + \sum_{i=1}^m 0 \cdot x_{n+i} \rightarrow \max; \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_{n+i} &= b_i, \quad i = 1, \dots, m; \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n + m. \end{aligned}$$

В качестве примеров экономических задач, сводящихся к ЗЛП, рассмотрим следующие задачи.

**Пример 1.1. Задача планирования производства.** Пусть предприятие может производить  $n$  различных изделий (продуктов). Пронумеруем эти продукты от 1 до  $n$ . Количество выпускаемого  $j$ -го продукта в плановую единицу времени обозначим  $x_j$ .

Тогда вектор количества продуктов, выпускаемых предприятием,

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ — план производства.}$$

Ясно, что все  $x_j$  должны быть неотрицательными.

Пусть для выпуска изделий необходимы  $m$  видов различных ресурсов (сырье, электроэнергия, рабочая сила и т.п.). Пронумеруем их от 1 до  $m$ . Предельное количество  $i$ -го ресурса, находящегося в распоряжении предприятия, обозначим  $b_i$ .

Пусть  $a_{ij}$  — количество  $i$ -го ресурса, расходуемое на производство единицы  $j$ -го продукта. Прибыль, которую предприятие получит при продаже единицы  $j$ -го продукта, обозначим  $c_j$ .

Принятые обозначения для наглядности сведены в табл. 1.

Таблица 1

Номер ресурса	Номер продукта	1	2	...	$n$
	Выпускаемое количество продукта $x_j$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
	Предельное количество (запас) ресурса $b_i$	Количество ресурса на изготовление единицы продукта $a_{ij}$			
1	$b_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	...	$a_{1n}$
2	$b_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	...	$a_{2n}$
...	...	...	...	...	...
$m$	$b_m$	$a_{m1}$	$a_{m2}$	...	$a_{mn}$

Тогда затраты ресурса  $i$ -го вида при выполнении плана производства

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n.$$

Естественно, эти затраты не должны превышать предельное количество  $i$ -го ресурса  $b_i$ .

Прибыль предприятия, получаемая при выполнении плана

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

равна

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n.$$

Основная задача планирования — выбор плана  $x$ , обеспечивающего получение максимальной прибыли при имеющихся ресурсах.

Математически это выглядит так:

$$Q = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2; \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \dots x_n &\geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, задача планирования производства сводится к ЗЛП в ее стандартной форме. ■

**Пример 1.2. Задача диеты.** Пусть необходимо определить рацион откорма скота. Будем считать, что в рацион должны входить  $m$  биологически необходимых питательных веществ (белки, жиры, углеводы, витамины и т.д.).

Известно, что  $i$ -го питательного вещества в дневном рационе должно быть не менее  $b_i$  единиц.

Предположим, что имеется  $n$  различных кормов, из которых можно составлять дневной рацион. Содержание  $i$ -го питательного вещества в  $j$ -м виде корма обозначим  $a_{ij}$  (считаем, что эти данные научно обоснованы). Цену единицы  $j$ -го вида корма примем равной  $c_j$ .

Задача заключается в том, чтобы выбрать наиболее дешевый пищевой рацион

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где  $x_j$  – дневное количество  $j$ -го корма;  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ , но так, чтобы животные получали достаточное количество всех питательных веществ.

Математическая формулировка задачи:

$$Q = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\geq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\geq b_2; \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\geq b_m; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \dots x_n &\geq 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## 1.2. Графический метод решения задач линейного программирования

Этот метод может применяться в случае двух переменных  $x_1$  и  $x_2$ . Пусть математическая формулировка ЗЛП имеет вид

$$Q = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max (\min) \quad (1.3)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & (\geq \text{ или } \leq) b_1; \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & (\geq \text{ или } \leq) b_2; \\
 & \dots \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 & (\geq \text{ или } \leq) b_m; \\
 x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.
 \end{aligned}
 \tag{1.4}$$

**Графический метод решения ЗЛП** состоит в следующем.

1. На координатной плоскости  $x_1x_2$  строится множество  $X$  (рис. 1.1), которое образует область допустимых решений (или область допустимых планов) ЗЛП.

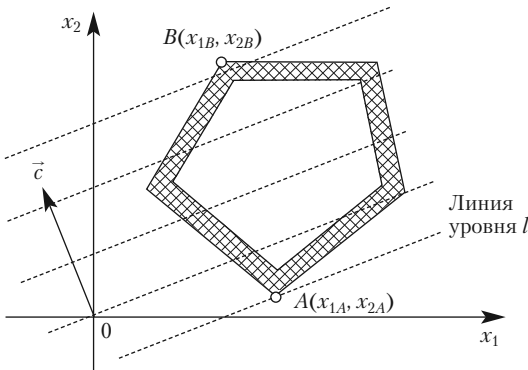


Рис. 1.1. Графический метод решения ЗЛП

Эта область представляет собой пересечение всех полуплоскостей, которые по отдельности являются решениями неравенств, входящих в систему ограничений (1.4).

Если  $X = \emptyset$ , то ЗЛП не имеет решений.

Заметим, что областью решений линейного неравенства  $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i$  является одна из двух полуплоскостей, на которые прямая  $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = 0$ , соответствующая данному неравенству, делит всю координатную плоскость.

Для того чтобы определить, какая из двух координатных полуплоскостей является областью решений, достаточно координаты какой-либо точки, не лежащей на прямой, подставить в неравенство.

Если оно удовлетворяется, то областью решений является полуплоскость, содержащая данную точку; в противном случае областью решений является полуплоскость, не содержащая данную точку.



2. Строится вектор градиента целевой функции (1.3)

$$\mathbf{c} = \nabla Q = \left[ \frac{\partial Q}{\partial x_1}, \frac{\partial Q}{\partial x_2} \right] = (c_1, c_2)$$

и ее линия уровня  $l$  — прямая, перпендикулярная вектору градиента и проходящая, например, через начало координат.

3. Строится семейство линий уровня целевой функции, представляющих собой прямые, параллельные  $l$ .

Очевидно, что значение  $Q$  постоянно на линии уровня и возрастает при перемещении линии уровня в направлении градиента  $\mathbf{c}$  целевой функции  $Q$ .

Если при таком движении точка  $A$  (см. рис. 1.1) является первой единственной точкой встречи линии уровня с областью допустимых решений  $X$ , то она будет точкой решения ЗЛП при  $Q \rightarrow \min$ , а если  $B$  — последняя общая точка при таком перемещении, то это точка решения ЗЛП при  $Q \rightarrow \max$ .

Данное обстоятельство запишем в виде

$$\begin{aligned} x^* &= (x_{1A}, x_{2A}), \text{ если } Q \rightarrow \min; \\ x^* &= (x_{1B}, x_{2B}), \text{ если } Q \rightarrow \max. \end{aligned}$$

Если при таком перемещении окажется, что линия уровня совпадет с одной из сторон области допустимых решений, то ЗЛП имеет *бесконечное* множество решений.

Если же вдруг окажется, что первой (последней) точки не существует, то задача отыскания  $\min$  ( $\max$ ) целевой функции  $Q$  является *неразрешимой*.

**Пример 1.3.** Решить ЗЛП

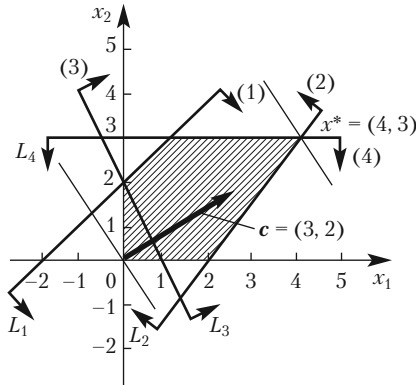
$$Q(x) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2 \geq 0, & (1) \\ 3x_1 - 2x_2 - 6 \leq 0, & (2) \\ 2x_1 + x_2 - 2 \geq 0, & (3) \\ x_2 \leq 3, & (4) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

*Решение.* Строим область допустимых решений задачи. Для этого пронумеруем ограничения задачи.

В прямоугольной декартовой системе координат, изображенной на рисунке, строим прямую  $x_1 - x_2 + 2 = 0$  ( $L_1$ ), соответствующую ограничению (1). Находим, какая из двух полуплоскостей, на которые эта прямая делит всю координатную плоскость, является областью решений неравенства (1).



Для этого достаточно координаты какой-либо точки, не лежащей на прямой, подставить в неравенство (1).

Так как прямая  $L_1$  не проходит через начало координат, подставляем координаты точки  $O(0, 0)$  в первое ограничение  $1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 2 \geq 0$  и получаем верное неравенство  $2 \geq 0$ .

Следовательно, точка  $O$  лежит в полуплоскости решений.

Таким образом, стрелки на концах прямой  $L_1$  должны быть направлены в полуплоскость, содержащую точку  $O$ .

Аналогично строим прямые  $3x_1 - 2x_2 - 6 = 0$  ( $L_2$ ),  $2x_1 + x_2 - 2 = 0$  ( $L_3$ ),  $x_2 = 3$  ( $L_4$ ) и области решений ограничений (2), (3) и (4). Находим общую часть полуплоскостей решений, учитывая при этом условия неотрицательности переменных; полученную область допустимых решений отметим на рисунке штриховкой.

По коэффициентам целевой функции строим вектор градиента целевой функции  $\vec{c} = (3, 2)$  и одну из линий уровня, перпендикулярную градиенту и проходящую, например, через начало координат.

Так как решается задача на отыскание максимума целевой функции, то линию уровня параллельно перемещаем в направлении градиента до точки выхода ее из области допустимых решений.

Эта точка  $x^*$  является точкой пересечения прямых, ограничивающих область допустимых решений и соответствующих неравенствам (2) и (4). Поэтому ее координаты можно найти, решая систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 6 = 0, \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

Получаем  $x^* = (4, 3)$ . Вычисляем  $Q(x^*) = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 18$ .

Ответ:  $\max Q(x) = 18$  при  $x^* = (4, 3)$ .

Легко убедиться, что любая другая точка из области допустимых решений ЗЛП дает значение целевой функции  $Q$  меньшее, чем полученное значение. ■

**Пример 1.4.** Решить ЗЛП

$$Q(x) = 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \min,$$

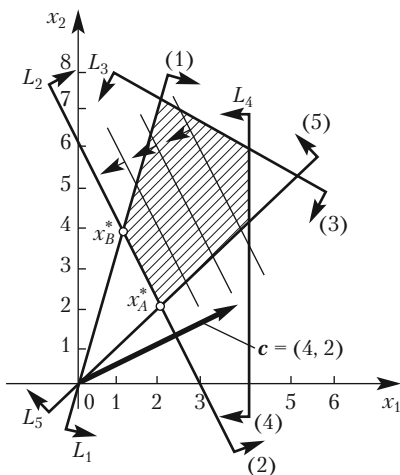
при ограничениях

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \geq 0, & (1) \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 6, & (2) \\ x_1 + 2x_2 \leq 16, & (3) \\ x_1 \leq 4, & (4) \\ x_1 - x_2 \leq 0. & (5) \end{cases}$$

*Решение.* Строим область допустимых решений, градиент целевой функции  $\vec{c} = (4, 2)$  и одну из линий уровня, перпендикулярную градиенту и имеющую общие точки с этой областью.

Перемещаем линию уровня в направлении, противоположном направлению градиента  $\vec{c}$ , так как решается задача на отыскание минимума функции.

Градиент  $\vec{c} = (4, 2)$  и нормаль  $\vec{n} = (2, 1)$  граничной прямой  $L_2$ , в направлении которой перемещаются линии уровня, лежат на одной прямой, так как их координаты пропорциональны  $4 : 2 = 2 : 1$ .



Следовательно, линия уровня целевой функции параллельна граничной прямой  $L_2$  области допустимых решений и выходит из этой области при движении против градиента (т.е. в направлении уменьшения целевой функции) через две угловые точки этой области  $x_A^*$  и  $x_B^*$ .

Таким образом, задача имеет бесконечное множество решений, являющихся точками отрезка  $[x_A^*, x_B^*]$ .

Эти точки  $x_A^* = L_2 \cap L_5, x_B^* = L_1 \cap L_2$  находим, решая соответствующие системы уравнений

$$\begin{array}{l}
 + \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 6, & (L_2) \\ x_1 - x_2 = 0 & (L_5) \end{cases} + \begin{cases} 4x_1 - x_2 = 0, & (L_1) \\ 2x_1 + x_2 = 6 & (L_2) \end{cases} \\
 \hline
 3x_1 = 6; & 6x_1 = 6; \\
 x_{1A}^* = 2, x_{2A}^* = 2; & x_{1B}^* = 1, x_{2B}^* = 4; \\
 x_A^* = (2, 2); & x_{1B}^* = (1, 4).
 \end{array}$$

Вычисляем  $Q(x_A^*) = Q(x_B^*) = 4 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 12$ .

Ответ:  $\min Q(x) = 12$  при  $x^* = (1-t)x_A^* + tx_B^*$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . ■

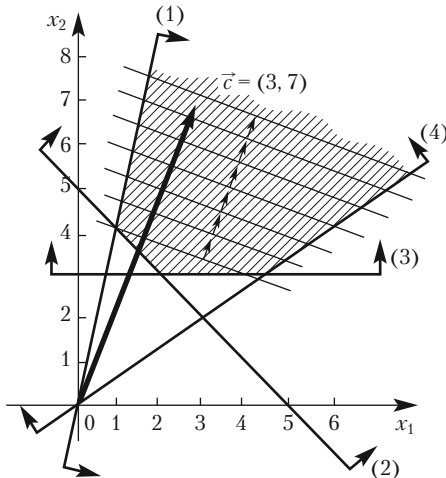
**Пример 1.5.** Решить ЗЛП

$$Q(x) = 3x_1 + 7x_2 \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 \geq 0, & (1) \\ x_1 + x_2 \geq 5, & (2) \\ x_2 \geq 3, & (3) \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 0. & (4) \end{cases}$$

*Решение.* Строим область допустимых решений, вектор градиента целевой функции  $\vec{c} = (3, 7)$  и одну из линий уровня.



В данной задаче необходимо найти максимум целевой функции, поэтому линию уровня перемещаем в направлении вектора градиента. Ввиду того, что в этом направлении область допустимых решений не ограничена, линия уровня уходит в бесконечность.

Задача не имеет решения вследствие неограниченности целевой функции.

Ответ:  $Q(x) \rightarrow +\infty$ . ■