21. РЕФЛЕКСИВНЫЕ ИГРЫ И ИНФОРМАЦИОННОЕ РАВНВЕСИЕ

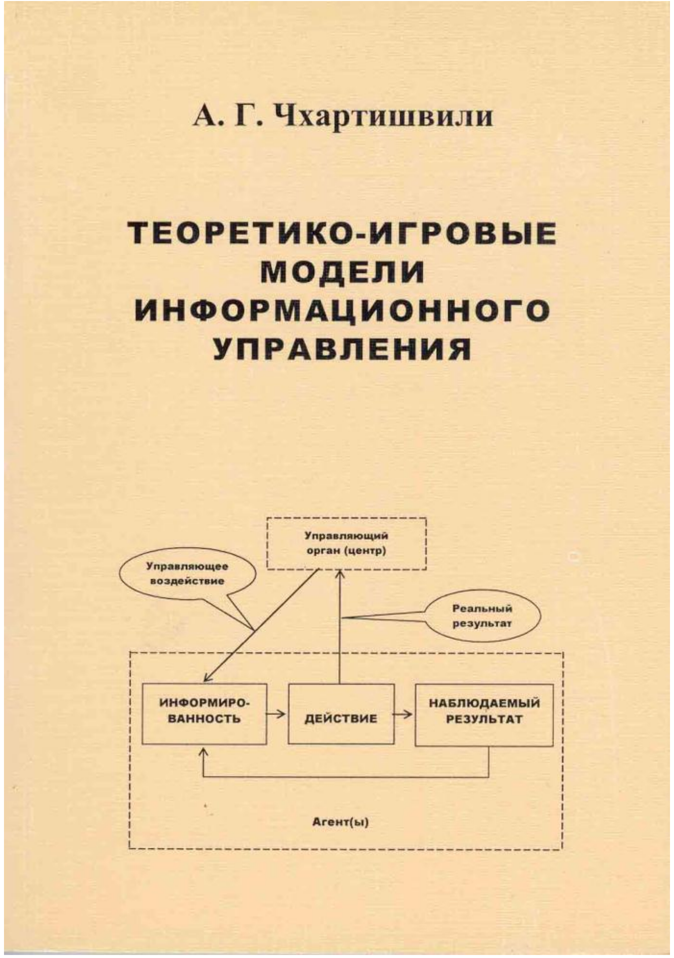
Новиков Д.А.

Чхартишвили А.Г.

серия «Умное управление»

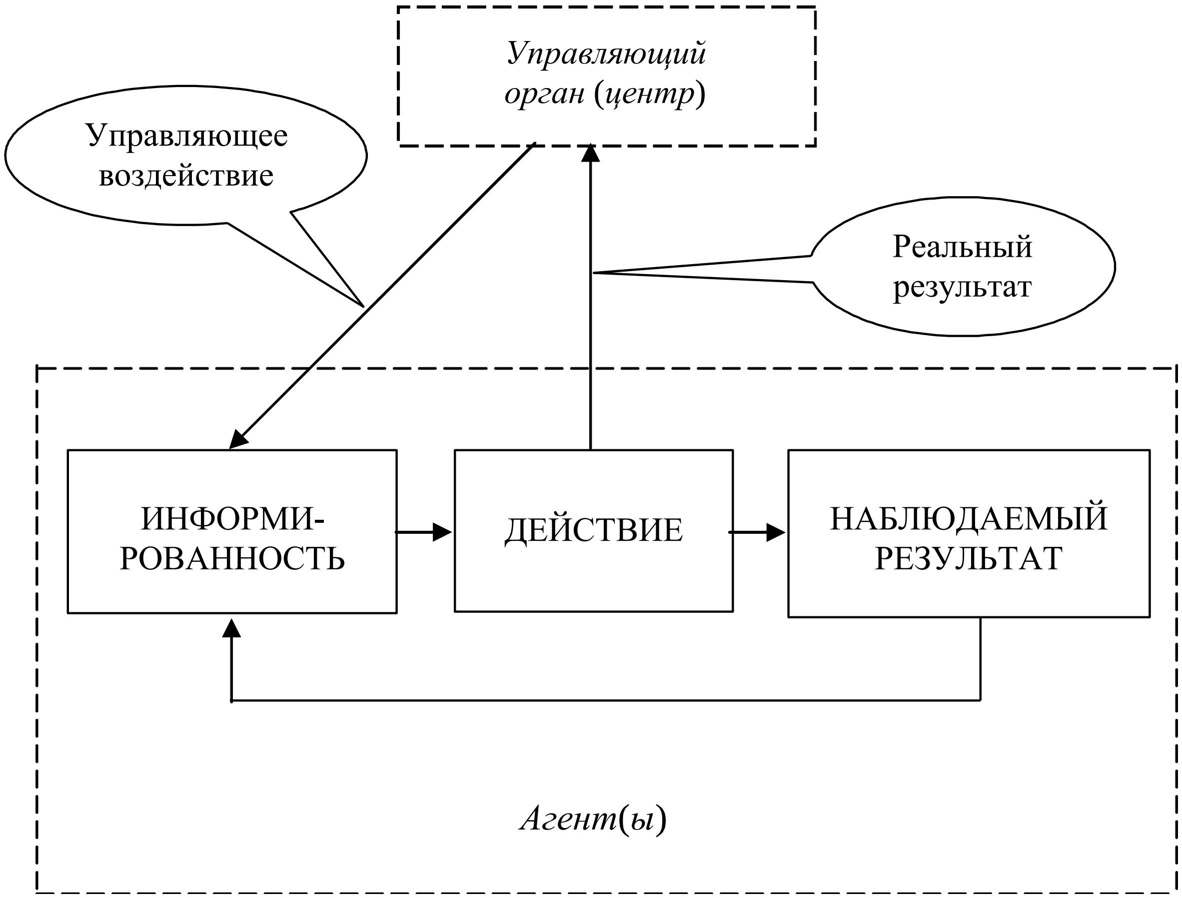
РЕФЛЕКСИВНЫЕ ИГРЫ И ИНФОРМАЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Рефлексивные игры. М.: СИНТЕГ, 2003.

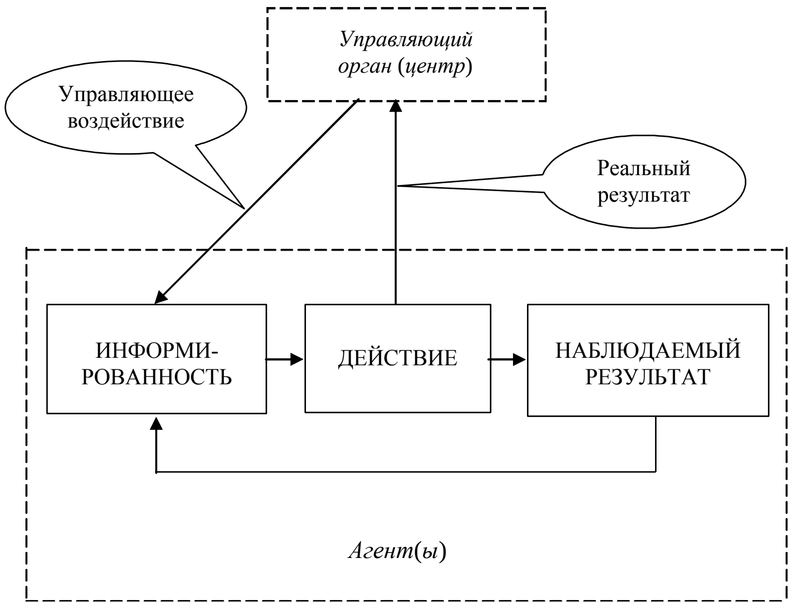


Чхартишвили А.Г. Теоретико-игровые модели информационного управления. М.: ПМСОФТ, 2004.

МОДЕЛЬ ИНФОРМАЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ



ОБЩАЯ ТЕХНОЛОГИЯ ПОСТАНОВКИ И ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧ ИНФОРМАЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ



ПЛАН

1. Базовые модели принятия решений
2. Рефлексия и рефлексивные игры
3. Типы информационных равновесий
4. Информационные воздействия
5. Информационное управление
6. Примеры

1. БАЗОВЫЕ МОДЕЛИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

1. **Базовые модели принятия решений**
2. Рефлексия и рефлексивные игры
3. Типы информационных равновесий
4. Информационные воздействия
5. Информационное управление
6. Примеры

МОДЕЛИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ПОЛНОЙ ИНФОРМИРОВАННОСТИ

A – множество допустимых действий агента.

Функция полезности $f(y): A \to \Re^1$.

Множество выбора: $P(f(\cdot), A) = \operatorname{Arg}\max\limits_{y \in A} f(y)$.

Гипотеза рационального поведения – агент выбирает с учетом всей имеющейся у него информации наилучшую с его точки зрения допустимую альтернативу, т.е. одну из альтернатив y^*, на которых достигается максимум его целевой функции:

$$y^* = \arg\max_{y \in A} f(y).$$

Принципы ограниченной рациональности:

выбор ε-оптимальных действий: $P_\varepsilon(f(\cdot), A) = \{y \in A \mid f(y) \geq f(y^*) - \varepsilon\}$,

или действий, обеспечивающих агенту заданный уровень полезности $\bar{f}$:

$$P(f(\cdot), A, \bar{f}\ \} = \{y \in A \mid f(y) \geq \bar{f}\ \}.$$

Пример. Рассмотрим экономического агента – производственное предприятие – принимающего решение об объеме выпускаемой продукции y. Технология производства такова, что может быть произведен любой объем продукции, не превышающий технологического ограничения $y^+ > 0$, то есть множество допустимых действий агента $A = [0; y^+]$. Предположим, что известна рыночная цена $\lambda > 0$ на продукцию, производимую агентом, и известна функция затрат агента $c(y) = y^2 / 2\,r$, где $r > 0$ – тип агента (параметр, отражающий эффективность его деятельности).

Если считать, что агент заинтересован в максимизации своей прибыли (разности между выручкой от продаж и затратами), то его функция полезности примет вид:

$$f(y) = \lambda\, y - y^2 / 2\,r.$$

Максимум этой функции на положительной полуоси достигается при выборе действия $y_{\max} = \lambda\, r$. Значит $y^* = \min\,\{\lambda\, r, y^+\}$, то есть агенту следует выбирать объем производства, максимизирующий его прибыль, если такой объем является технологически допустимым, или, в противном случае – максимально возможный с точки зрения технологических ограничений объем производства.

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ПРИРОДНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

$\theta \in \Omega$ – *состояние природы*

$f(y, \theta): A \times \Omega \to R^1$ – целевая функция (функция полезности)

Гипотеза детерминизма – субъект, принимая решение, стремится устранить неопределенность и принимать решения в условиях полной информированности.

В зависимости от той информации о состоянии природы, которой обладает ЛПР на момент принятия решений, выделяют:

- *интервальную неопределенность* (ЛПР известно только множество Ω возможных значений состояния природы);
- *вероятностную неопределенность* (ЛПР известно распределение вероятностей значений состояния природы на множестве Ω);
- *нечеткую неопределенность* (ЛПР известна функция принадлежности различных значений состояния природы на множестве Ω).

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ИГРОВОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Теория игр описывает взаимодействие рациональных субъектов в ситуации, когда выигрыш одного зависит от действий всех (в общем случае), то есть *игра* определяется как такое взаимодействие, в котором выигрыш каждого агента зависит как от его собственного действия, так и от действий других агентов.

Пусть задано множество *игроков* $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. i-ый игрок выбирает действие y_i из множества своих допустимых действий $y_i \in A_i$, $i \in N$. Совокупность действий всех игроков называются *ситуацией игры* (*игровой ситуацией*): $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Целевая функция i-го игрока зависит от игровой ситуации y и описывается отображением $f_i(y): A' \to \Re^1$, где $A' = \prod_{i \in N} A_i$. Т.е. каждой комбинации действий игроков соответствует некоторый выигрыш каждого из них. Совокупность множества игроков (агентов), целевых функций и допустимых множеств агентов $\Gamma_0 = \{N, \{f_i(\cdot)\}_{i \in N}, \{A_i\}_{i \in N}\}$ называется *игрой в нормальной форме*. При этом предполагается, что каждый из игроков выбирает свои действия однократно, одновременно с другими игроками и независимо, то есть, не имея возможности договариваться с ними о своих стратегиях поведения (так называемая *модель некооперативного поведения*). *Решением игры* (*равновесием*) называется множество устойчивых в том или ином смысле векторов действий агентов.

РАВНОВЕСИЯ В НЕКООПЕРАТИВНЫХ ИГРАХ

Гарантирующее равновесие.

Пусть i-ый игрок считает, что все остальные игроки действуют против него. Это – критерий максимального гарантированного результата – МГР, который соответствует тому, что игрок выбирает действие

$$(1)\quad y_i^{г} \in \operatorname{Arg}\max_{y_i \in A_i} \min_{y_{-i} \in A_{-i}} f_i(y_i, y_{-i}),$$

где $A_{-i} = \prod_{j \neq i} A_j$, $y_{-i} = (y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n)$ – *обстановка игры* для i-го агента

Вектор действий игроков, состоящий из компонентов, описываемых (1), $i \in N$, называется *максиминным*, или *гарантирующим равновесием*.

Равновесие в доминантных стратегиях.

y_i^d – *доминантное действие* i-го агента, если если какая бы обстановка игры не складывалась и какое бы действие не выбирал i-ый игрок при этой обстановке, его выигрыш будет максимальным при выборе именно доминантного действия:

$$\forall y_i \in A_i \;\; \forall y_{-i} \in A_{-i} \quad f_i(y_i^d, y_{-i}) \geq f_i(y_i, y_{-i}).$$

Если у каждого игрока существует доминантное действие, то совокупность доминантных действий называется *равновесием в доминантных стратегиях* (РДС) $\{y_i^d\}_{i \in N}$.

Равновесие Нэша $y^N \in A'$:

$$\forall i \in N \;\; \forall y_i \in A_i \quad f_i(y_i^N, y_{-i}^N) \geq f_i(y_i, y_{-i}^N),$$

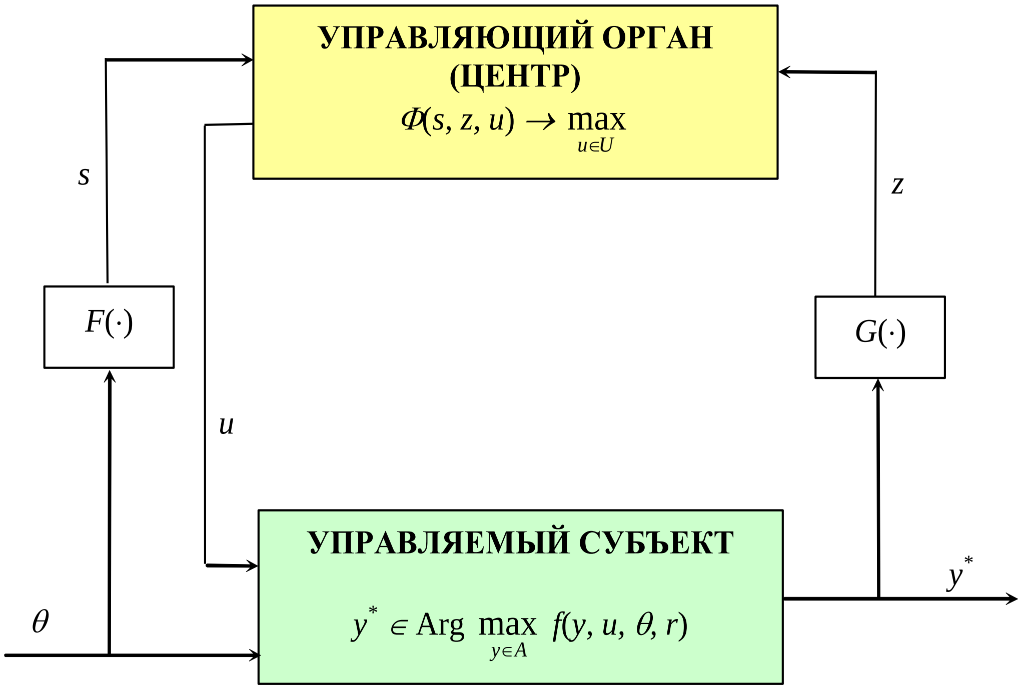
то есть для любого агента и для любого допустимого его действия выбор им равновесного по Нэшу действия дает ему выигрыш не меньший, чем при выборе любого другого действия при условии, что остальные игроки выбирают равновесные по Нэшу действия.

КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ОРГАНИЗАЦИОННЫМИ СИСТЕМАМИ

Модель организационной системы определяется заданием:
– состава ОС (участников, входящих в ОС, то есть ее элементов);
– структуры ОС (совокупности информационных, управляющих, технологических и других связей между участниками ОС);
– множеств допустимых стратегий (ограничений и норм деятельности) участников ОС, отражающих, в том числе, институциональные, технологические и другие ограничения и нормы их совместной деятельности;
– предпочтений участников ОС;
– информированности – той информации о существенных параметрах, которой обладают участники ОС на момент принятия решений о выбираемых стратегиях;
– порядка функционирования (последовательности получения информации и выбора стратегий участниками ОС).

Управление ОС, понимаемое как воздействие на управляемую систему с целью обеспечения требуемого ее поведения, может затрагивать каждый из шести перечисленных параметров ее модели. Обычно порядок функционирования тесно связан со структурой, поэтому получаем пять классов задач управления.

ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ. МОТИВАЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ



$\Phi(\cdot)$ - целевая функция центра (критерий эффективности управления);

$f(\cdot)$ - целевая функция управляемого субъекта;

$\theta \in \Omega$ - состояние природы (внешней среды);

$y \in A$ - действие управляемого субъекта;

$u \in U$ - управление;

$r \in B$ - параметр управляемого субъекта;

Центру известны агрегированные величины $s = F(\theta) \in \Omega_0$ и $z = G(y^*) \in A_0$.

ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ

$$\min_{\theta \in \Omega,\, r \in B} \; \min_{y^* \in P(\theta, u, r)} \Phi(F(\theta), G(y^*), u) \to \max_{u \in U}$$

$$P(\theta, u, r) = \mathrm{Arg}\max_{y \in A} f(y, u, \theta, r)$$

1. Базовые модели принятия решений
2. **Рефлексия и рефлексивные игры**
3. Типы информационных равновесий
4. Информационные воздействия
5. Информационное управление
6. Примеры

РЕФЛЕКСИЯ

«РЕФЛЕКСИЯ (лат. reflexio – обращение назад). Термин, означающий отражение, а также исследование познавательного акта».

Рефлексия первого рода (авторефлексия) и второго рода.

Стратегическая и информационная рефлексия.

Примеры: «Задача о скоординированной атаке», «Electronic Mail Game», «Задача о двух брокерах», «Пенальти», «Снос на мизере».

Максимальный ранг рефлексии, который следует иметь агенту для того, чтобы охватить все многообразие исходов игры (упуская из виду некоторые стратегии оппонента, агент рискует уменьшить свой выигрыш), назовем *максимальным целесообразным рангом рефлексии*.

РОЛЬ ИНФОРМИРОВАННОСТИ. ОБЩЕЕ ЗНАНИЕ

Игра в нормальной форме:

$\Gamma_0 = \{N, (X_i)_{i \in N}, (f_i(\cdot))_{i \in N}\}$

N - множество игроков (агентов),

$(X_i)_{i \in N}$ - множества допустимых действий

$(f_i(\cdot))_{i \in N}$, f_i: $X \to \Re^1$ - целевые функции, $i \in N$.

Равновесие Нэша:

$$\forall i \in N \qquad x_i^* \in \operatorname{Arg}\max_{x_i \in X_i} f_i(x_1^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*).$$

Общее знание - факт, который:

i) известен всем агентам

ii)всем агентам известно i)

iii) всем агентам известно ii)

и т.д. до бесконечности.

СТРАТЕГИЧЕСКАЯ РЕФЛЕКСИЯ (БИМАТРИЧНЫЕ ИГРЫ)

Матрицы выигрышей $\boldsymbol{A} = ||a_{ij}||$ и $\boldsymbol{B} = ||b_{ij}||$ размерности $n \times m$ соответственно.

$I = \{1, 2, ..., n\}$ – множество действий первого агента (выбирающего строку),

$J = \{1, 2, ..., m\}$ – множество действий второго агента (выбирающего столбец).

Гарантирующие стратегии агентов следующие:

$$i_0 \in \text{Arg} \max_{i \in I} \min_{j \in J} a_{ij}, \quad j_0 \in \text{Arg} \max_{j \in J} \min_{i \in I} b_{ij}.$$

Пример («*Игра в прятки*»)

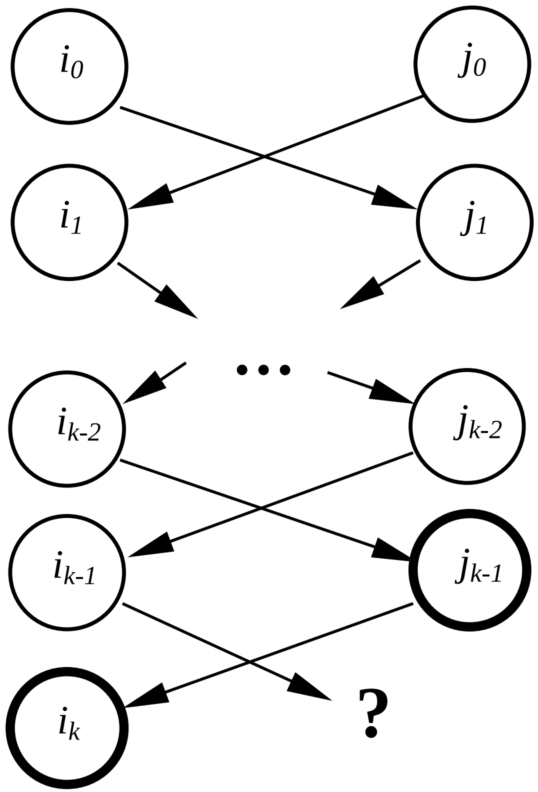
Ранг рефлексии агентов и соответствующие действия по выбору комнат

Ранг рефлексии агента	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Комната, выбираемая прячущимся	Самая темная	Любая, кроме самой светлой	Любая, кроме самой темной	Самая светлая	Самая темная
Комната, выбираемая ищущим	Самая светлая	Самая темная	Любая, кроме самой светлой	Любая, кроме самой темной	Самая светлая

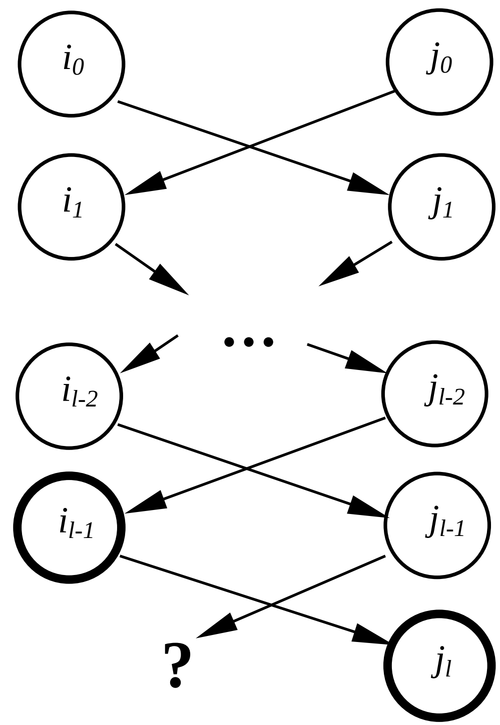
СТРАТЕГИЧЕСКАЯ РЕФЛЕКСИЯ (БИМАТРИЧНЫЕ ИГРЫ)

Определим *субъективные гарантирующие стратегии* в биматричной игре MG_{kl}:

$$i_k = \arg\max_{i \in I} a_{ij_{k-1}}, \; j_l = \arg\max_{j \in J} b_{i_{l-1}j}, \; k, l \in \aleph.$$



Субъективное описание игры MG_{kl} с точки зрения первого агента



Субъективное описание игры MG_{kl} с точки зрения второго агента

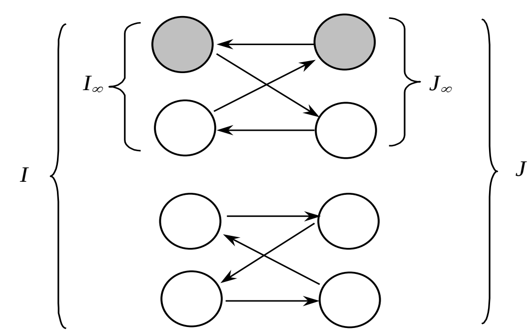
СТРАТЕГИЧЕСКАЯ РЕФЛЕКСИЯ (БИМАТРИЧНЫЕ ИГРЫ)

Предположение: (*) $\forall\ j \in J \ \left|\operatorname{Arg}\max_{i \in I} a_{ij}\right| = 1,\ \forall\ i \in I \ \left|\operatorname{Arg}\max_{j \in J} b_{ij}\right| = 1$

(**) $\left|\operatorname{Arg}\max_{i \in I}\min_{j \in J} a_{ij}\right| = \left|\operatorname{Arg}\max_{j \in J}\min_{i \in I} b_{ij}\right| = 1.$

Утверждение. Стратегическая рефлексия в биматричных играх имеет смысл, если агенты используют субъективные гарантирующие стратегии, которые не являются равновесными по Нэшу.

Утверждение. В биматричных играх 2×2, в которых не существует равновесия Нэша, $I_\infty = I$, $J_\infty = J$.



Пример графа наилучших ответов в биматричной игре 4×4, в которой $I_\infty \subset I$, $J_\infty \subset J$

Утверждение. В биматричных играх $n \times m$ максимальные целесообразные ранги стратегической рефлексии первого и второго агентов удовлетворяют следующим неравенствам

$$K_{max}(n, m) \leq \min\{n, m + 1\},\ L_{max}(n, m) \leq \min\{m, n + 1\},$$
$$R_{max}(n, m) \leq \max\{\min\{n, m + 1\}, \min\{m, n + 1\}\}.$$

Следствие. В биматричной игре $n \times n$, $n \geq 2$, максимальный целесообразный ранг стратегической рефлексии любого агента $R_{max}(n, n) \leq n$.

Утверждение. Для произвольной биматричной игры переход к игре рангов не приводит к появлению новых равновесий.

Утверждение. В игре рангов существует не более одного равновесия.

СТРАТЕГИЧЕСКАЯ РЕФЛЕКСИЯ (БИМАТРИЧНЫЕ ИГРЫ)

Пример («*Снос на мизере*»).

Действия	**Н**	**С**
Н	(3; 2)	(5; 1)
С	(5; 0)	(2; 3)

Матрица выигрышей в игре «Снос на мизере»

В рассматриваемом примере равновесия Нэша в чистых стратегиях не существует, а гарантирующие стратегии следующие: i_0 = *«Н»*, j_0 = *«С»*.

i_1 = *«Н»*, j_1 = *«Н»*,
i_2 = *«С»*, j_2 = *«Н»*,
i_3 = *«С»*, j_3 = *«С»*,
i_4 = *«Н»*, j_4 = *«Н»*,
…

Видно, что четвертый уровень одинаковых рангов рефлексии повторяет первый, и дальше субъективные гарантирующие стратегии будут периодически повторяться. Кроме того, $I_K = I$ при $K = 2$, а $J_L = J$ при $L = 1$, то есть первые два ранга рефлексии исчерпывают множества допустимых действий агентов, а первые три ранга исчерпывают все комбинации чистых стратегий.

Первому агенту выгодны следующие игры (то есть следующие комбинации рангов рефлексии): MG_{00}, MG_{03}, MG_{10}, MG_{13}, MG_{21}, MG_{22}, MG_{32}. При этом он в пяти случаях из семи имеет ранг рефлексии, не меньший, чем у оппонента.

Второму агенту выгодны следующие игры: MG_{01}, MG_{02}, MG_{11}, MG_{12}, MG_{23}, MG_{33}. При этом он во всех шести случаях имеет ранг рефлексии, не меньший, чем у оппонента.

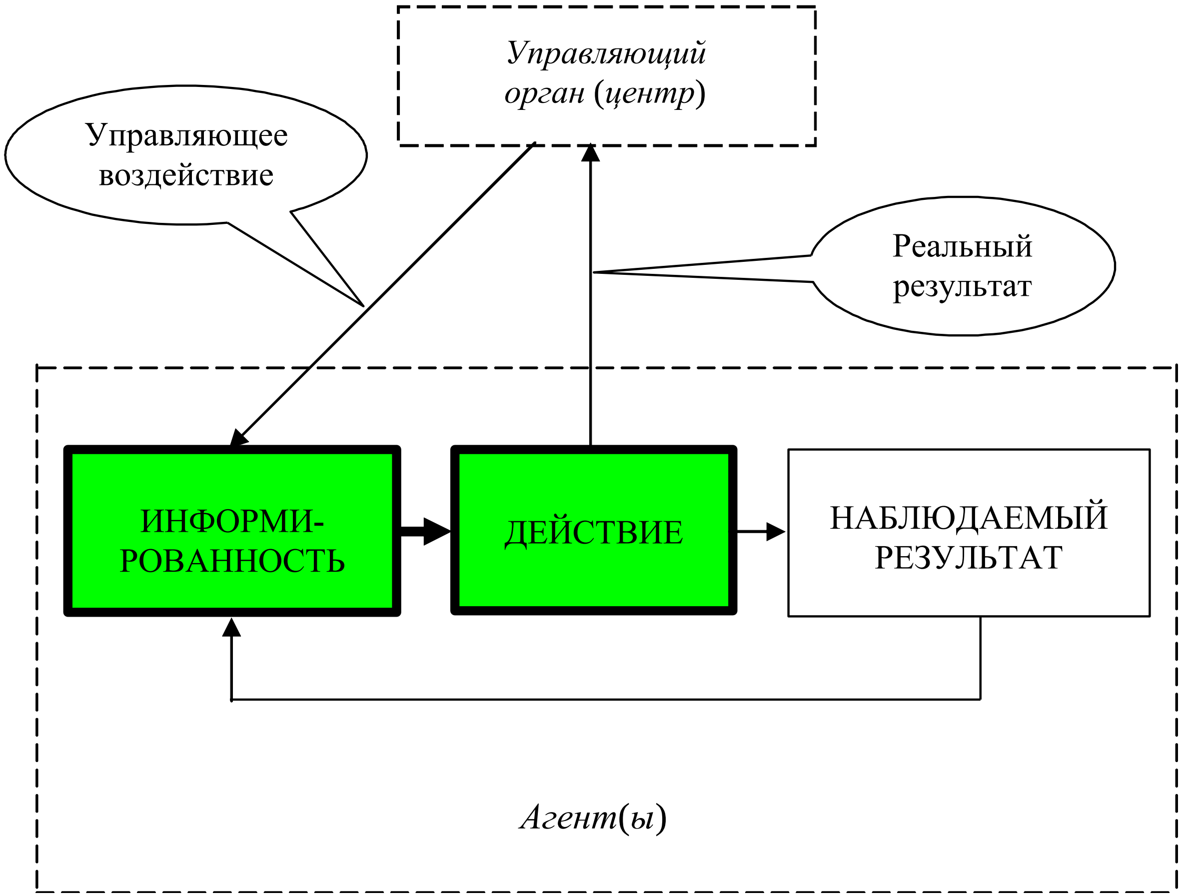
Выигрыш агента может оказаться меньше его МГР. Так, МГР первого агента в рассматриваемой игре равен трем, второго – единице. В играх MG_{20}, MG_{23} и MG_{33} первый агент получает выигрыш, равный двум, что строго меньше его МГР $a_0 = 3$. В играх MG_{22}, MG_{31} и MG_{32}, второй агент получает нулевой выигрыш, что строго меньше его МГР $b_0 = 1$.

СТРАТЕГИЧЕСКАЯ РЕФЛЕКСИЯ (ИНФОРМАЦИОННЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ)

Если w – ранг рефлексии, то число действий (число реальных и фантомных агентов), которые необходимо принимать во внимание агенту (при произвольных $x_i \in X_i$ и $x_{-i} \in X_{-i}$), равно $2(w + 1)$, а число связей между ними – $(w + 1)!$ (при этом предполагается, что агент считает оппонента примерно таким же рациональным, каким и себя).

Если учесть информационные ограничения, то получим, что должно выполняться либо $2(w + 1) \leq 7 \pm 2$, либо $(w + 1)! \leq 7 \pm 2$. Решение первого неравенства в целых положительных числах дает $w \in \{0; 1; 2; 3\}$, второго – $w \in \{0; 1; 2\}$. При числе Миллера равном 7 получаем, что **максимальный (в силу информационных ограничений) ранг стратегической рефлексии равен двум.**

ИНФОРМИРОВАННОСТЬ И ДЕЙСТВИЕ



ИГРЫ С ПОЛНОЙ ИНФОРМИРОВАННОСТЬЮ. ОБЩЕЕ ЗНАНИЕ

Игра в нормальной форме:

$\Gamma = \{N, (X_i)_{i \in N}, (f_i(\cdot))_{i \in N}\}$

N – множество игроков (агентов)

$(X_i)_{i \in N}$ – множества допустимых действий

$(f_i(\cdot))_{i \in N}$, $f_i: X' \to \Re^1$ – целевые функции

Общее знание (common knowledge) – D. Lewis (1969), R. Aumann (1976) –

факт, удовлетворяющий следующим требованиям:

i) о нем известно всем агентам;

ii) всем агентам известно i);

iii) всем агентам известно ii)

и т.д. до бесконечности.

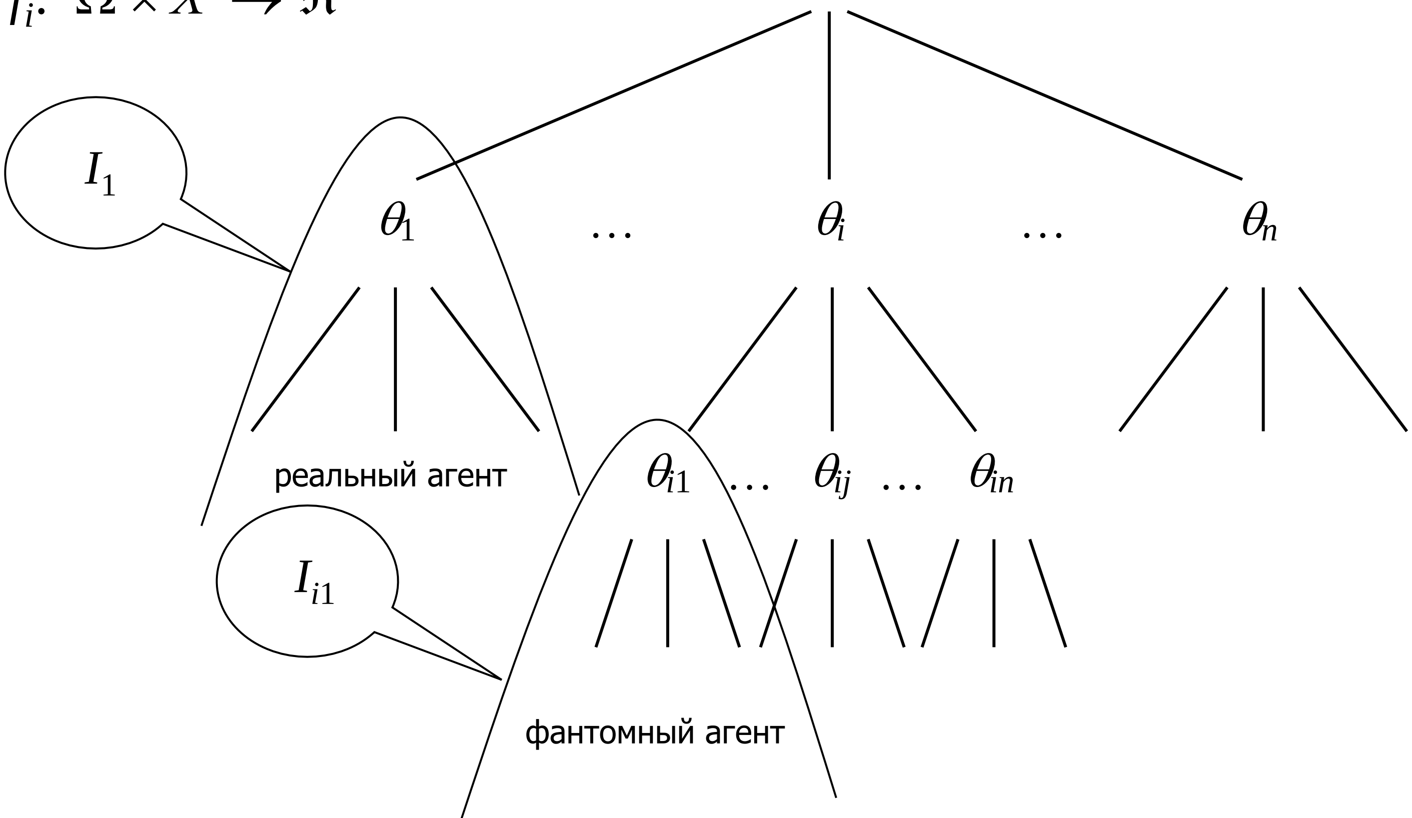
РЕФЛЕКСИВНЫЕ ИГРЫ. СТРУКТУРА ИНФОРМИРОВАННОСТИ

$\Gamma_I = \{N, (X_i)_{i \in N}, (f_i(\cdot))_{i \in N}, \Omega, I\}$ – рефлексивная игра

Ω – множество возможных состояний природы

I – структура информированности

$f_i\colon\ \Omega \times X' \to \Re^1$



I_i - реальный агент

$\left.\begin{array}{l} I_{ij} \\ I_{ijk} \\ \ldots \end{array}\right\}$ фантомные агенты

I_σ , $\sigma \in \Sigma_+$

Σ_+ – конечная последовательность индексов из N

Σ – в том числе пустая последовательность

ИГРЫ И ИНФОРМИРОВАННОСТЬ

Глубина	1	Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн (1944)	
		Дж. Нэш (1951)	
	2	Дж. Харшаньи (1968-69)	Рефлексивные игры
	3	J. Sacovics (2001)	Рефлексивные игры
	....		Рефлексивные игры
	$\propto$	J.-F. Mertens, S. Zamir (1985)	

ИНФОРМАЦИОННОЕ РАВНОВЕСИЕ

Набор действий x_τ^*, $\tau \in \Sigma_+$, назовем ***информационным равновесием***, если выполнены следующие условия:

1. структура информированности I имеет конечную сложность ν;

2. $\forall i \in N, \forall \lambda, \mu \in \Sigma \quad I_{\lambda i} = I_{\mu i} \Rightarrow x_{\lambda i}^* = x_{\mu i}^*$;

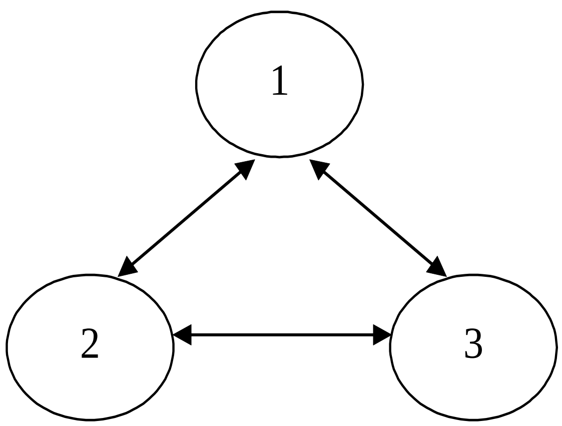
3. $\forall i \in N, \forall \sigma \in \Sigma$

(1) $$x_{\sigma i}^* \in \operatorname*{Arg\,max}_{x_i \in X_i} f_i(\theta_{\sigma i}, x_{\sigma i 1}^*, \ldots, x_{\sigma i, i-1}^*, x_i, x_{\sigma i, i+1}^*, \ldots, x_{\sigma i, n}^*).$$

ГРАФ РЕФЛЕКСИВНОЙ ИГРЫ. ПРИМЕР 1

$$f_i(\theta, x_1, x_2, x_3) = (\theta - x_1 - x_2 - x_3)x_i - \frac{x_i^2}{2}, x_i \geq 0,\ i \in N = \{1, 2, 3\};\ \theta \in \Omega = \{1, 2\}.$$

<u>Пример 1.</u> Пусть первые два агента – оптимисты, а третий – пессимист, причем все трое одинаково информированы.



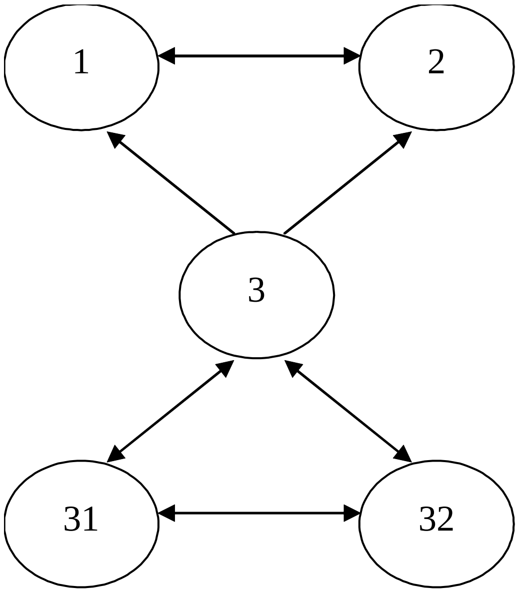
$$\begin{cases} x_1^* = \dfrac{2 - x_2^* - x_3^*}{3}, \\ x_2^* = \dfrac{2 - x_1^* - x_3^*}{3}, \\ x_3^* = \dfrac{1 - x_1^* - x_2^*}{3}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^* = \dfrac{1}{2}, \\ x_2^* = \dfrac{1}{2}, \\ x_3^* = 0. \end{cases}$$

ГРАФ РЕФЛЕКСИВНОЙ ИГРЫ. ПРИМЕР 2

$$f_i(\theta, x_1, x_2, x_3) = (\theta - x_1 - x_2 - x_3)x_i - \frac{x_i^2}{2},\; x_i \geq 0,\, i \in N = \{1, 2, 3\};\; \theta \in \Omega = \{1, 2\}$$

.

Пример 2. Пусть первые два агента оптимисты, а третий – пессимист, который считает всех трех агентов одинаково информированными пессимистами. Первые два агента одинаково информированы, причем оба они адекватно информированы о третьем агенте.



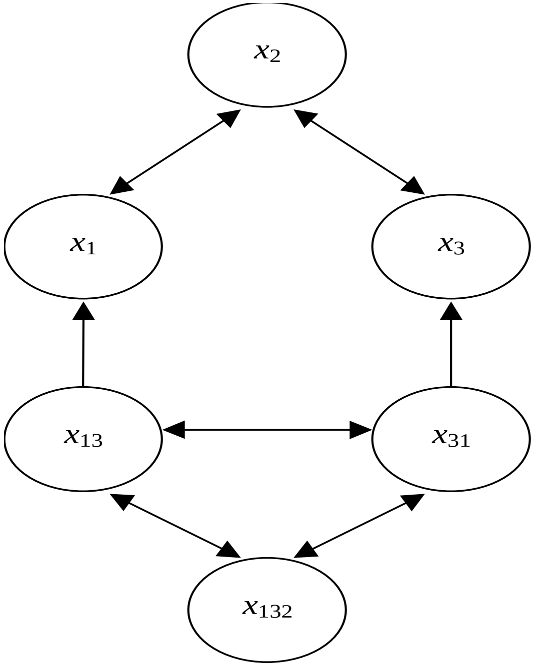
$$\begin{cases} x_1^* = \dfrac{2 - x_2^* - x_3^*}{3}, \\ x_2^* = \dfrac{2 - x_1^* - x_3^*}{3}, \\ x_3^* = \dfrac{1 - x_{31}^* - x_{32}^*}{3}, \\ x_{31}^* = \dfrac{1 - x_{32}^* - x_3^*}{3}, \\ x_{32}^* = \dfrac{1 - x_{31}^* - x_3^*}{3}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^* = \dfrac{9}{20}, \\ x_2^* = \dfrac{9}{20}, \\ x_3^* = \dfrac{1}{5}, \\ x_{31}^* = \dfrac{1}{5}, \\ x_{32}^* = \dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

ГРАФ РЕФЛЕКСИВНОЙ ИГРЫ. ПРИМЕР 2

$$f_i(\theta, x_1, x_2, x_3) = (\theta - x_1 - x_2 - x_3)x_i - \frac{x_i^2}{2},$$

- $x_i \geq 0$, $i \in N = \{1, 2, 3\}$; $\theta \in \Omega = \{1, 2\}$.

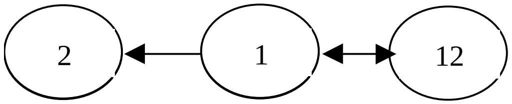
- Пусть все трое агентов оптимисты, первый и второй взаимно информированы, второй и третий также взаимно информированы. По мнению первого агента, третий считает всех троих одинаково информированными пессимистами; также и первый агент, по мнению третьего, считает всех троих одинаково информированными пессимистами.



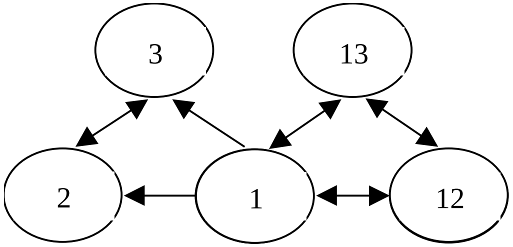
$$\begin{cases} x_1^* = \dfrac{2 - x_2^* - x_{13}^*}{3}, \\ x_2^* = \dfrac{2 - x_1^* - x_3^*}{3}, \\ x_3^* = \dfrac{2 - x_{31}^* - x_2^*}{3}, \\ x_{31}^* = \dfrac{1 - x_{132}^* - x_{13}^*}{3}, \\ x_{13}^* = \dfrac{1 - x_{31}^* - x_{132}^*}{3}, \\ x_{132}^* = \dfrac{1 - x_{31}^* - x_{13}^*}{3}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^* = \dfrac{17}{35}, \\ x_2^* = \dfrac{12}{35}, \\ x_3^* = \dfrac{17}{35}, \\ x_{31}^* = \dfrac{1}{5}, \\ x_{13}^* = \dfrac{1}{5}, \\ x_{132}^* = \dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

РЕФЛЕКСИЯ В ХУДОЖЕСТВЕННЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ

Пример (“Детектив”). Пусть имеются следователь и преступник. Обозначим их, соответственно 1 и 2. Тогда этапу процесса раскрытия преступления соответствует граф рефлексивной игры $2 \leftarrow 1 \leftrightarrow 12$ (компонент 12 соответствует тому, что преступник пытается убедить следователя в собственной невиновности), а факту раскрытия преступления – переход к графу $1 \leftrightarrow 2$.

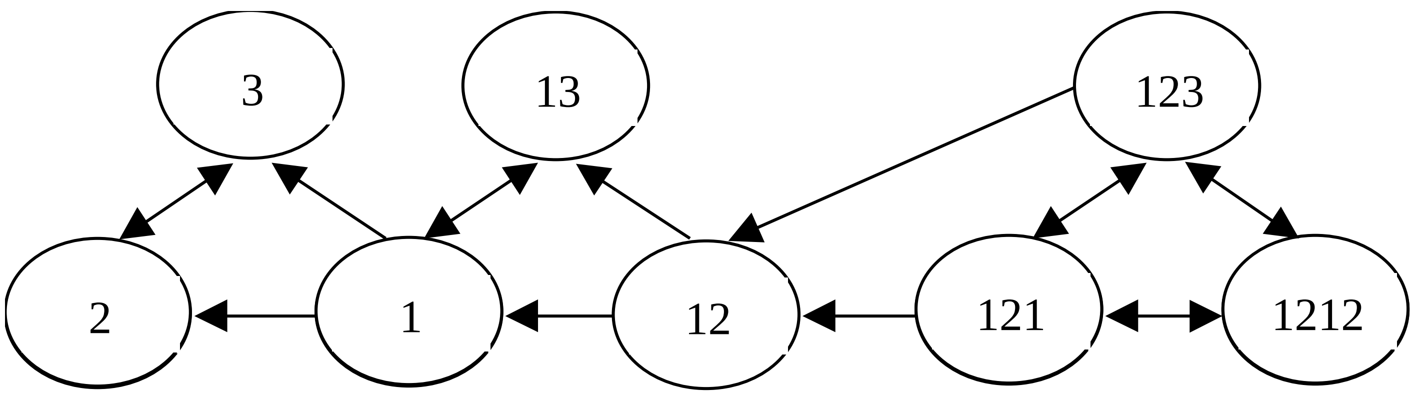


- Пример (“Шпионские страсти-1”). Пусть в ситуации участвуют два государства (*A* и *B*) и агент, который, будучи высокопоставленным чиновником государства *A* является одновременно осведомителем государства *B*, о чем государству *A* неизвестно.



РЕФЛЕКСИЯ В ХУДОЖЕСТВЕННЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ

В **фильме “Император и убийца”** (1999, режиссер – Чен Кайге) описывается ситуация, основными участниками которой являются два человека – китайский император и убийца. Убийцу посылают к императору под видом посла соседнего государства. Император, между тем, осведомлен о том, что посол на самом деле является убийцей. Однако убийца знает о том, что император знает, что он собирается убить его. Вершинам графа соответствуют следующие реальные и фантомные агенты: 1 – император; 2 – убийца; 3 - жена императора; 12 – убийца, который считает императора неосведомленным; 121 – император, который считает пришедшего к нему человека послом соседнего государства; 1212 – посол соседнего государства.



СУУЩЕСТВОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННОГО РАВНОВЕСИЯ

Утверждение. Если информационное равновесие x_τ^*, $\tau \in \Sigma_+$, существует, то оно состоит из не более чем ν попарно различных действий, а в системе (1) содержится не более чем ν попарно различных уравнений.

Утверждение. Пусть в рефлексивной игре со структурой информированности конечной сложности множества действий X_i – выпуклые компактные подмножества $\Re^n$, для каждого агента целевая функция $f_i(\theta, x_1, \ldots, x_n)$ при любом $\theta \in \Omega$ непрерывна по всем переменным и строго вогнута по переменной x_i. Тогда в этой игре существует информационное равновесие.

Утверждение. Пусть для любого непустого множества $N' \subseteq N$ справедлив следующий факт: для любых $\theta_k \in \Omega$, $k \in N'$, и любых $x_m^* \in X_m$, $m \notin N'$, существует равновесие Нэша в игре с общим знанием k-агентов, то есть существуют x_k^*, $k \in N'$, удовлетворяющие

$$x_k^* \in \operatorname*{Arg\,max}_{x_k \in X_k} f_k(\theta_k, x_1^*, \ldots, x_{k-1}^*, x_k, x_{k+1}^*, \ldots, x_n^*), \quad k \in N'.$$

Тогда для любой конечной регулярной структуры информированности существует информационное равновесие.

РЕФЛЕКСИВНЫЕ ИГРЫ И БАЙЕСОВЫ ИГРЫ. ОГРАНИЧЕННОСТЬ РАНГА РЕФЛЕКСИИ

(*)

$f_i(\theta, x_1, x_2)$

$\theta \in \Omega, \quad x_i \in X_i,$
$i=1, 2$

$I_1=(\theta_1,\ \theta_{12},\ \theta_{121},\ldots)$
$I_2=(\theta_2,\ \theta_{21},\ \theta_{212},\ \ldots)$

(**)

$$BR_1(\theta, x_2) = \operatorname*{Arg\,max}_{x_1 \in X_1} f_1(\theta, x_1, x_2),$$

$$BR_2(\theta, x_1) = \operatorname*{Arg\,max}_{x_2 \in X_2} f_2(\theta, x_1, x_2),$$

$$BR_2^{-1}(\theta, x_2) = \{x_1 \in X_1 \mid x_2 \in BR_2(\theta, x_1)\},$$

$$BR_1^{-1}(\theta, x_1) = \{x_2 \in X_2 \mid x_1 \in BR_1(\theta, x_2)\}.$$

(***)

$$\begin{cases} \varphi(\theta_1, \theta_{12}, \theta_{121}, \ldots) \in BR_1(\theta_1, \psi(\theta_{12}, \theta_{121}, \ldots)), \\ \psi(\theta_2, \theta_{21}, \theta_{212}, \ldots) \in BR_2(\theta_2, \varphi(\theta_{21}, \theta_{212}, \ldots)). \end{cases}$$

$$x_1^*(I_1) = \varphi(I_1) = \varphi(\theta_1,\ \theta_{12},\ \theta_{121},\ \ldots),$$

$$x_2^*(I_2) = \psi(I_2) = \psi(\theta_2,\ \theta_{21},\ \theta_{212},\ \ldots).$$

Утверждение. Пусть в игре (*), в которой для любых θ , x_1 , x_2 множества (**) непусты, существует хотя бы одно точечное равновесие Байеса–Нэша (***). Тогда для любой структуры информированности бесконечной глубины I_1 и любого $\chi \in X_1$ существует равновесие, в котором χ является равновесным действием первого агента при его структуре информированности I_1 .

РЕФЛЕКСИЯ И ХАОС

Во многих случаях увеличение ранга рефлексии приводит к росту неопределенности – неустойчивости коллективного поведения агентов, что может быть объяснено нелинейностью нестационарных рефлексивных отображений.

Пример. Пусть имеются два агента, выбирающих действия из единичного отрезка и имеющих следующие целевые функции (экономической интерпретацией данной модели является «дуополия Курно»): $f_1(\theta, x_1, x_2) = 4\,\theta\, x_1\, x_2\, (1 - x_2) - x_1^2 / 2$, $f_2(\theta, x_1, x_2) = x_1\, x_2 - x_2^2 / 2$, а состояние природы принимает значения из множества $\Omega = (1/4; 1]$.

Предположим, что на нижнем уровне конечного дерева информированности, имеющего глубину m_0, имеет место общее знание с некоторым значением $\theta_0 \in \Omega$ состоянии природы. Вычисляем равновесие Нэша игры фантомных агентов: $x_1(\theta_0) = x_2(\theta_0) = 1 - 1 / (4\,\theta_0)$ и находим наилучшие ответы первого и второго агентов на действия оппонентов:

$BR_1(\theta, x_2) = 4\,\theta\, x_2\, (1 - x_2)$, $BR_2(\theta, x_1) = x_1$, $\theta \in \Omega$.

Получаем, что наилучшие ответы $\tau 1$-агентов, $\tau \in \Sigma$, $|\tau| \le m_0$, удовлетворяют логистическому отображению

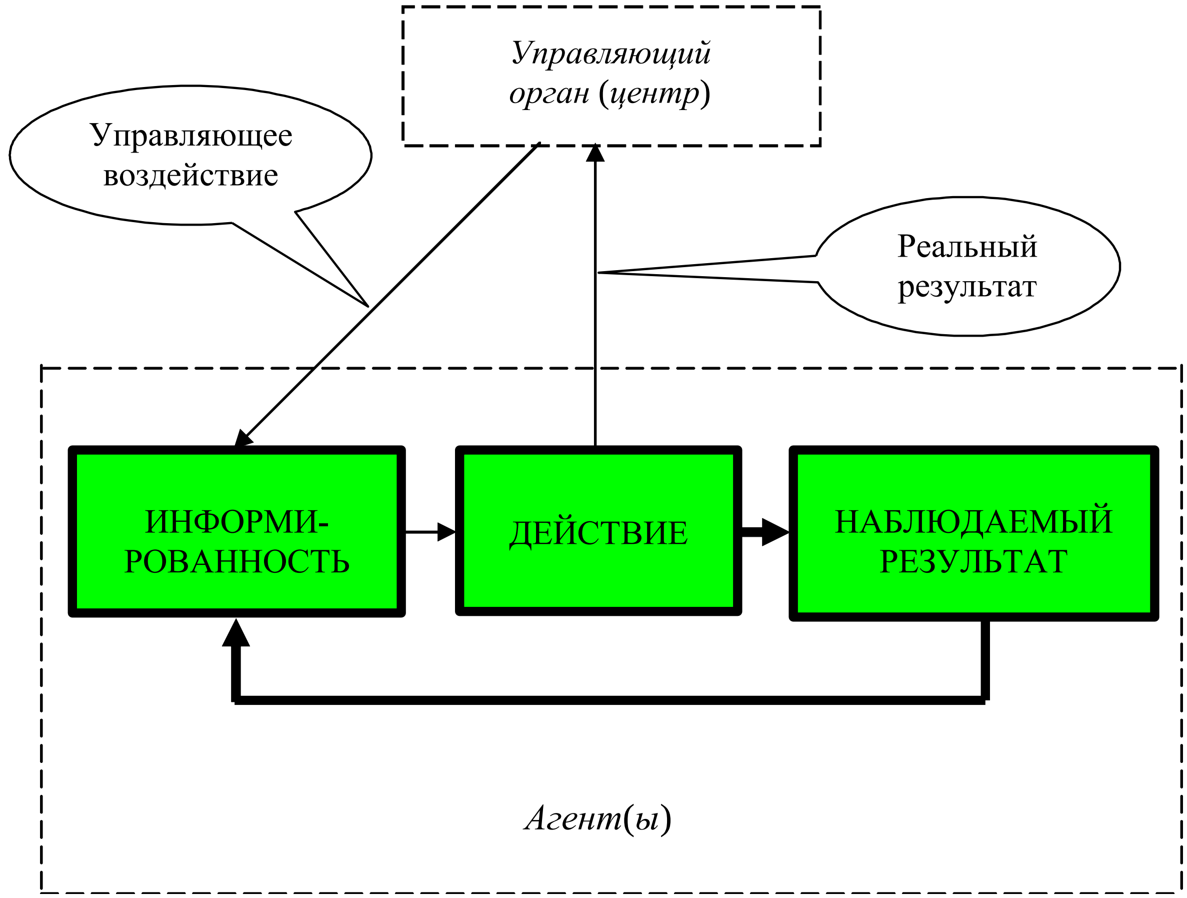
$$x_1^m = 4\,\theta\, x_1^{m-1}\, (1 - x_1^{m-1}), \quad m = 1, 2, \dots, [m_0/2], \qquad (*)$$

с начальной точкой $x_1^0 = 1 - 1 / (4\,\theta_0)$ (здесь за $[\cdot]$ обозначена целая часть).

Анализируя (*), получаем, что в зависимости от информированности θ_τ τ-агентов (отметим, что эта информированность для всех агентов с первого по $(m_0 - 2)$-й уровень включительно считается одинаковой, т.е. $\theta_\tau \equiv \theta$ для некоторого $\theta \in \Omega$ при $|\tau| \le m_0 - 2$, и в случае различной информированности агентов может наблюдаться еще более сложное поведение) возможны следующие варианты асимптотически (при $m_0 \to \infty$) устойчивых и слабо зависящих от начальной точки стратегий первого реального агента: **выбор единственного действия; периодическое поведение; хаотическое или периодическое поведение**.

3. ТИПЫ ИНФОРМАЦИОННЫХ РАВНОВЕСИЙ

3. ТИПЫ ИНФОРМАЦИОННЫХ РАВНОВЕСИЙ



СТАБИЛЬНОЕ ИНФОРМАЦИОННОЕ РАВНОВЕСИЕ

$\Gamma_I = \{N, (X_i)_{i \in N}, (f_i(\cdot))_{i \in N}, \Omega, I\}$ – рефлексивная игра
$w_i(\cdot): \Omega \times X' \to W_i,\ i \in N$
$w_i(\cdot)$ – *функция наблюдения* i-го агента

Информационное равновесие $x_{\tau i}$, $\tau i \in \Sigma_+$, будем называть *стабильным* при заданной структуре информированности I , если для любого $\tau i \in \Sigma_+$ выполняется

(2) $w_i(\theta_{\tau i}, x_{\tau i1}, \dots, x_{\tau i,i-1}, x_{\tau i}, x_{\tau i,i+1}, \dots, x_{\tau in}) =$
$= w_i(\theta_\tau, x_{\tau 1}, \dots, x_{\tau,i-1}, x_{\tau i}, x_{\tau,i+1}, \dots, x_{\tau n}).$

СТАБИЛЬНОЕ ИНФОРМАЦИОННОЕ РАВНОВЕСИЕ

$\Gamma_I = \{N, (X_i)_{i \in N}, (f_i(\cdot))_{i \in N}, \Omega, I\}$ – рефлексивная игра

$w_i(\cdot): \Omega \times X' \to W_i,\ i \in N$

$w_i(\cdot)$ – *функция наблюдения* i-го агента

<u>Утверждение.</u> Пусть структура информированности I имеет сложность ν и существует информационное равновесие $x_{\tau i},\ \tau i \in \Sigma_+$. Тогда система соотношений (2) содержит не более чем ν попарно различных условий.

ИСТИННЫЕ И ЛОЖНЫЕ РАВНОВЕСИЯ

Пусть набор действий $x_{\tau i}$, $\tau i \in \Sigma_+$, является стабильным информационным равновесием. Будем называть его *истинным* равновесием, если набор $(x_1, \ldots, x_n)$ является равновесием в условиях общего знания о состоянии природы θ (или о наборе $(r_1, \ldots, r_n)$ индивидуальных характеристик (типов) агентов).

Стабильное информационное равновесие, не являющееся истинным, назовем *ложным*.

<u>Утверждение.</u> Пусть целевые функции агентов имеют вид

(3) $f_i\,(r_i, x_1, \ldots, x_n) = \varphi_i\,(r_i, x_i, y_i(x_{-i}))$,

а функции наблюдения – вид $w_i(\theta, x) = y_i(x_{-i})$, $i \in N$. Тогда любое стабильное равновесие является истинным.

Содержательно условие (3) означает следующее: выигрыш каждого агента зависит от его типа, его действия и функции наблюдения, зависящей от действий остальных агентов, но не от их типов.

СЛУЧАЙ НАБЛЮДАЕМЫХ ДЕЙСТВИЙ. НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ – СОСТОЯНИЕ ПРИРОДЫ

$$w_i\,(\theta, x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n)$$

A1. Для любых $i \in N$, $\sigma \in \Sigma$, любых представлений $\theta_{\sigma i} \in \Omega$ и $\theta'_{\sigma i} \in \Omega$ таких, что $\theta_{\sigma i} \neq \theta'_{\sigma i}$, и для любой обстановки игры

$$x^*_{\sigma i,-i} \in X_{-i} = \prod_{j \neq i} X_j$$

Выполняется

$$BR_i(\theta_{\sigma i}, x^*_{\sigma i,-i}) \cap BR_i(\theta'_{\sigma i}, x^*_{\sigma i,-i}) = \varnothing,$$

где

$$BR_i(\theta_{\sigma i}, x^*_{\sigma i,-i}) = \operatorname*{Arg\,max}_{x_i \in X_i} f_i(\theta_{\sigma i}, x^*_{\sigma i1}, \ldots, x^*_{\sigma i,i-1}, x_i, x^*_{\sigma i,i+1}, \ldots, x^*_{\sigma i,n}).$$

Утверждение. Пусть выполнено предположение А1 и существует информационное равновесие x^*. Тогда x^* является стабильным информационным равновесием в том и только том случае, если структура информированности имеет глубину 1:

$$\forall\, i \in N, \;\; \forall\, \sigma \in \Sigma \quad \theta_{\sigma i} = \theta_i\,.$$

СЛУЧАЙ НАБЛЮДАЕМЫХ ДЕЙСТВИЙ. НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ – ТИПЫ АГЕНТОВ

$$w_i\,(r_i, x_1,\dots, x_n) = (x_1,\dots, x_n)$$

$x^* = (x_1^*,\dots, x_n^*)$ – стабильно-равновесный вектор действий

$$\rho_i = \{r_i \in \Re_+ \mid x_i^* \in BR_i(r_i, x_{-i}^*)\}, \quad i \in N.$$

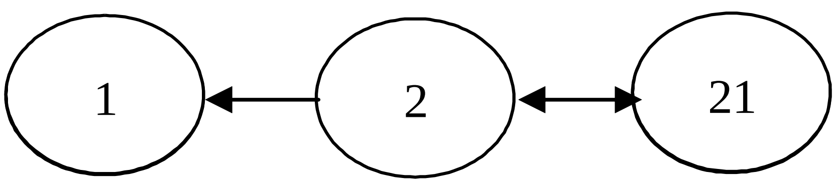
<u>Утверждение.</u> Пусть x^* – стабильно-равновесный вектор действий реальных агентов. Если для любого $i \in N$ множество ρ_i состоит ровно из одного элемента, то вектор типов является общим знанием (и, соответственно, равновесие истинное).

<u>Утверждение.</u> Если вектор действий реальных агентов x^* является стабильно-равновесным при некоторой структуре информированности, то для элементов этой структуры при любых $i \in N$ и $\sigma \in \Sigma$ выполняется $r_{\sigma i} \in \rho_i$.

СТАБИЛЬНОСТЬ ИНФОРМАЦИОННОГО РАВНОВЕСИЯ. ПРИМЕР

$$\theta = 1 \qquad \begin{pmatrix} (1,1) & (0,0) \\ (0,1) & (2,0) \end{pmatrix}$$

$$\theta = 2 \qquad \begin{pmatrix} (0,1) & (1,2) \\ (1,1) & (2,2) \end{pmatrix}$$



$\Omega = \{1, 2\}$,
$X_1 = X_2 = \{1; 2\}$

$\theta = \theta_1 = 1$,
$\theta_2 = \theta_{21} = 2$

Информационное равновесие:

$x_1 = x_2 = x_{21} = 2$.

Равновесие нестабильно

ЛОЖНОЕ РАВНОВЕСИЕ. ПРИМЕР

$$\theta = 1 \qquad\qquad \theta = 2$$

$$\begin{pmatrix} (2,2) & (4,1) \\ (1,4) & (3,3) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} (2,2) & (0,3) \\ (3,0) & (1,1) \end{pmatrix}$$

$\Omega = \{1, 2\}, X_1 = X_2 = \{1; 2\}$

$\theta = 2$, $\theta_1 = \theta_2 = 1$

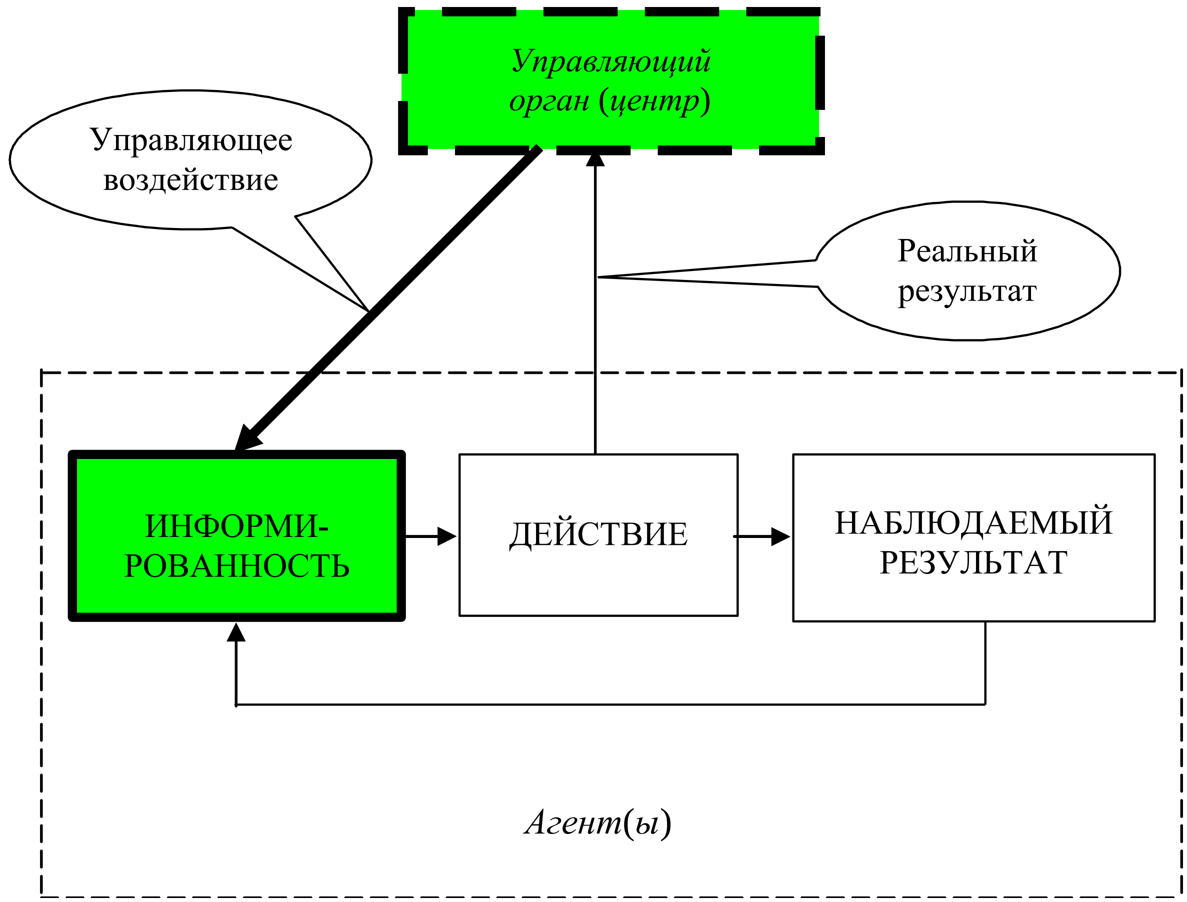
Информационное равновесие: $x_1 = x_2 = 1$.

Равновесие ложное, поскольку в случае общего знания равновесие было бы другим: $x_1 = x_2 = 2$.

4. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ

1. Базовые модели принятия решений
2. Рефлексия и рефлексивные игры
3. Типы информационных равновесий
4. **Информационные воздействия**
5. Информационное управление
6. Примеры

4. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ



ИНФОРМАЦИОННОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ И РЕФЛЕКСИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Вид информационного воздействия	**Сообщение центра**	**Сформированная структура**
Однородное информационное регулирование	Всем агентам сообщается величина θ'	$\forall \sigma \in \Sigma_+$ $\theta_\sigma = \theta'$
Неоднородное информационное регулирование	i-му агенту ($i \in N$) сообщается свое значение θ_i	$\forall i \in N \ \forall \sigma \in \Sigma$ $\theta_{i\sigma} = \theta_i$
Рефлексивное управление	i-му агенту ($i \in N$) сообщается θ_i и набор значений θ_{ij}, $j \in N \backslash \{i\}$	$\forall i \in N$, $j \in N \backslash \{i\}$ $\forall \sigma \in \Sigma$ $\theta_{ij\sigma} = \theta_{ij}$

АКТИВНЫЙ ПРГНОЗ

Активный прогноз – сообщение информации о будущих значениях параметров, зависящих от состояния природы и действий агентов.

$\Gamma_I = \{N, (X_i)_{i \in N}, (f_i(\cdot))_{i \in N}, \Omega, I\}$ – рефлексивная игра
$z(\cdot): \Omega \times X' \to Z, \ i \in N$
Z – множество прогнозов

Центр сообщает агентам прогноз $z \in Z$.

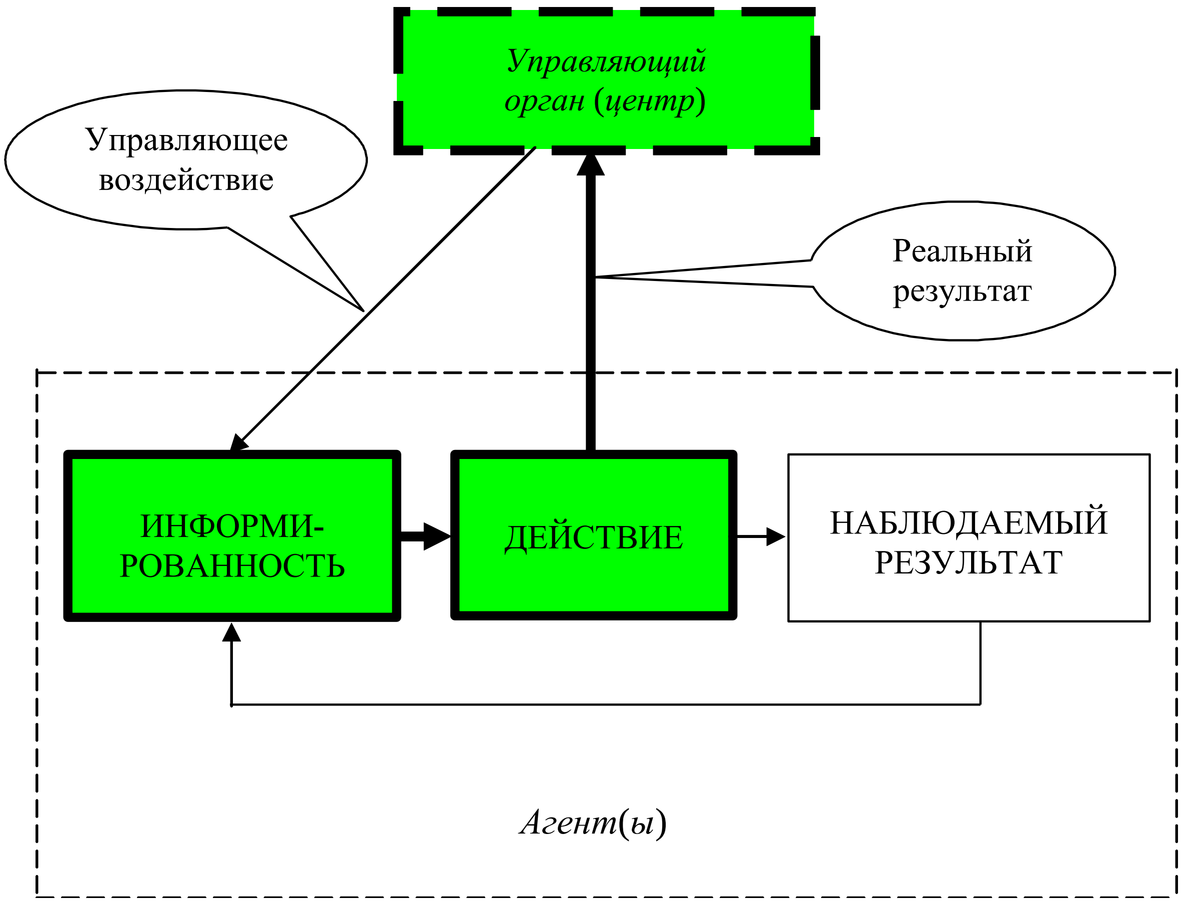
Агенты решают систему соотношений

$x_i \in BR_i(\theta, x_{-i}), \ i \in N,$
$z(\theta, x) = z$.

5. ИНФОРМАЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ

1. Базовые модели принятия решений
2. Рефлексия и рефлексивные игры
3. Типы информационных равновесий
4. Информационные воздействия
5. **Информационное управление**
6. Примеры

5. ИНФОРМАЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ



КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ ИНФОРМАЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ

$\Psi_X(I) \subseteq X'$ – множество векторов действий реальных агентов, являющихся равновесными при структуре информированности I

$\Psi_I(x)$ – множество структур информированности, при которых вектор действий реальных агентов x является равновесным (решение обратной задачи)

$\Phi(x, I)$ – целевая функция центра

$\mathfrak{I}$ – множество структур информированности, которые могут быть сформированы центром и для которых существует хотя бы одно информационное равновесие

Задача ИУ в форме целевой функции:

$$\min_{x \in \Psi_X(I)} \Phi(x, I) \xrightarrow[I \in \mathfrak{I}]{} \max .$$

Задача ИУ в форме множества достижимости:

найти множество векторов $x \in X'$, для которых множество структур $\Psi_I(x) \cap \mathfrak{I}$ непусто

РЕФЛЕКСИВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

$E_N(\theta_1,\ldots,\theta_n) = \{(x_1,\ldots,x_n) \in X' \mid \forall\ i \in N\ \ x_i \in BR_i(\theta_i, x_{-i})\}$ – параметрическое равновесие Нэша

$$E_N = \bigcup_{(\theta_1,\ldots,\theta_n)\in\Omega^n} E_N(\theta_1,\ldots,\theta_n)$$

$$X_i^0 = \mathrm{Pr}_i\, E_N, \quad i \in N \qquad X_{-i}^k = \prod_{j \neq i} X_j^k, \quad i \in N, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$BR_i(\Omega, X_{-i}) = \bigcup_{\theta \in \Omega,\ x_{-i} \in X_{-i}} BR_i(\theta, x_{-i}), \quad i \in N$$ – рефлексивные отображения

$$X_i^k = BR_i(\Omega, X_{-i}^{k-1}), \quad k = 0, 1, \ldots, \quad i \in N$$

Утверждение. Для любых $k = 0,\ 1,\ \ldots$ и $i \in N$ выполняется

$$X_i^k \subseteq X_i^{k+1}.$$

СТАЦИОНАРНОСТЬ РЕФЛЕКСИВНЫХ ОТБРАЖЕНИЙ

Рефлексивное отображение i–го агента называется *стационарным*, если

$$X_i^k = X_i^{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

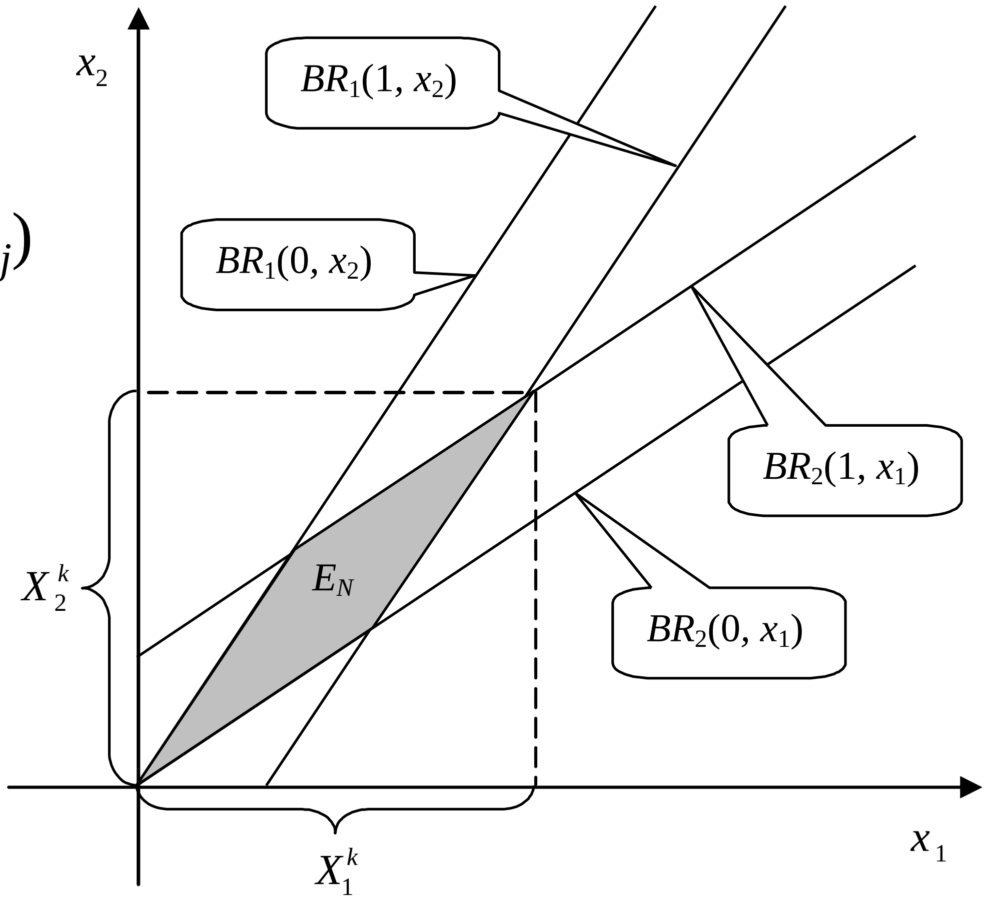
Утверждение. Если рефлексивные отображения всех агентов стационарны, то множество действий i-го агента, которые могут быть реализованы как компоненты информационного равновесия, реализуется в рамках структуры информированности глубины не более 2 и составляет $X_i^0,\ i \in N$. При этом ранг рефлексии каждого агента равен 1, а множество равновесных действий реальных агентов составляет $E = \prod_{i \in N} X_i^0$.

РЕФЛЕКСИВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ. ПРИМЕР 1 (СТАЦИОНАРНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ)

$$f_i(\theta, x_1, x_2) = x_i - x_i^2 / 2\,(\theta + \alpha\, x_j)$$

$$\alpha \in (0; 1),\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2$$

$$\Omega = [0; 1]$$

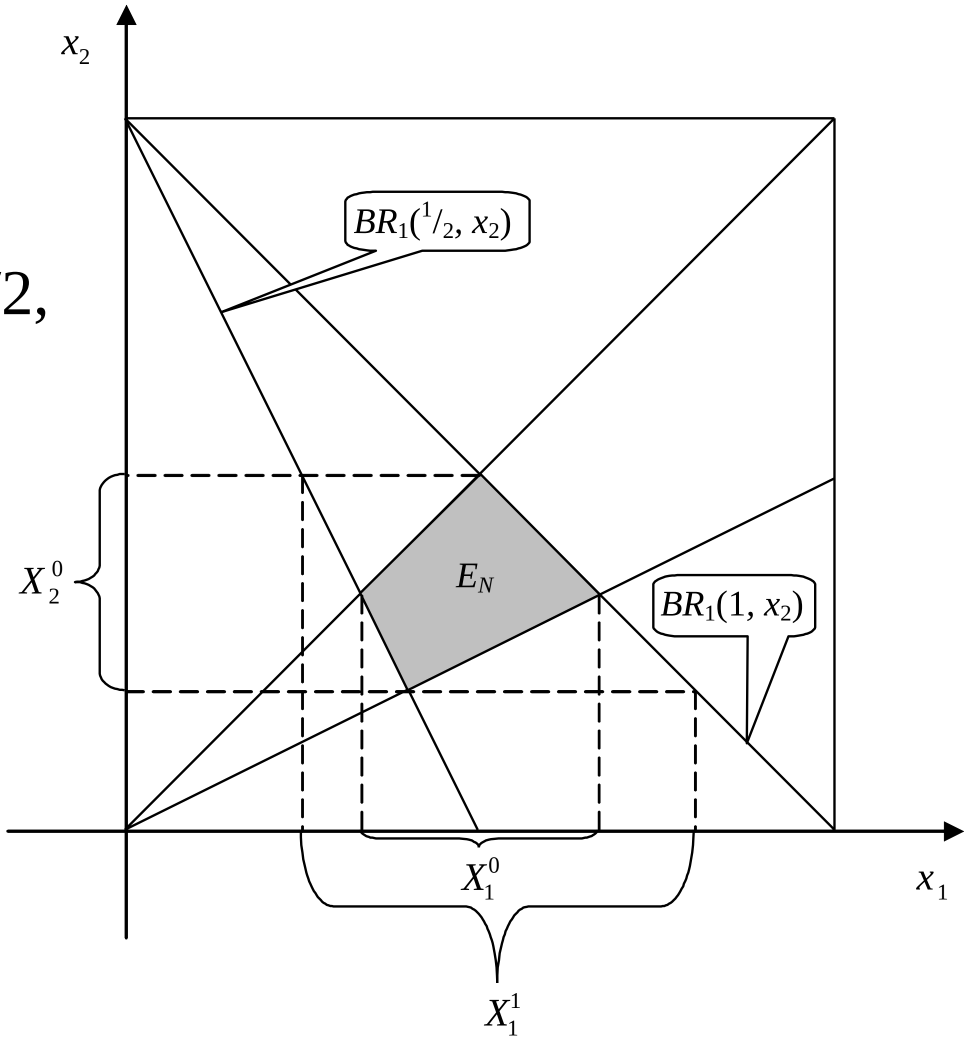


РЕФЛЕКСИВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ. ПРИМЕР 2 (НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ)

$$f_1(\theta, x_1, x_2) = \theta (1 - x_2)\, x_1 - x_1^2 /2,$$

$$f_2(\theta, x_1, x_2) = \theta\, x_1\, x_2 - x_2^2 /2$$

$$\Omega = [1/2\,;1],\ X_1 = X_2 = (0;1)$$



ЛИНЕЙНЫЕ РЕФЛЕКСИВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

(i) $f_i(\theta, x_1, x_2) = \varphi_i(\theta) x_i^{\,2} + \psi_i(\theta) x_i x_j + \eta_i(\theta) x_i + \xi_i(\theta, x_j), \quad j = 3 - i, \quad i = 1, 2.$

(ii) $\theta \in \Omega = [\alpha, \beta] \subset \Re^1, \qquad X_i = [L_i, R_i] \subset R^1$

Для любых $\theta_1,\ \theta_2 \in \Omega$:

(iii) $\varphi_i(\theta_i) < 0$

(iv) $L_i \le \dfrac{\psi_i(\theta_i)\eta_j(\theta_j) - 2\varphi_j(\theta_j)\eta_i(\theta_i)}{4\varphi_j(\theta_j)\varphi_i(\theta_i) - \psi_j(\theta_j)\psi_i(\theta_i)} \le R_i, \quad i = 1, 2$

(v) $0 \le \dfrac{\psi_i(\theta_i)}{2\varphi_i(\theta_i)} \dfrac{\psi_j(\theta_j)}{2\varphi_j(\theta_j)} \le 1$

Утверждение. Рефлексивные отображения игры (i)-(ii) при выполнении условий (iii)-(v) являются стационарными.

РЕФЛЕКСИВНАЯ НЕМАНИПУЛИРУЕМОСТЬ МЕХАНИЗМОВ ПЛАНИРОВАНИЯ

Механизм: i-й агент ($i \in N$) выбирает сообщение центру $s_i \in S_i$.

Центр назначает агентам планы $x_i = h_i(s) = h_i(s_1, \ldots, s_n)$.

Агенты получают выигрыши $f_i(x_i, r_i)$.

1. «Классическая» неманипулируемость (типы агентов являются общим знанием): для любого типа r_i равновесной стратегией i-го агента является сообщение $s_i^* = r_i$.

2. Рефлексивная неманипулируемость: для любого типа r_i существует подструктура информированности $(r_{i\sigma})$, $i \in N$, $\sigma \in \Sigma_+$, такая, что $s_i^* = r_i$.

РЕФЛЕКСИВНАЯ НЕМАНИПУЛИРУЕМОСТЬ МЕХАНИЗМОВ ПЛАНИРОВАНИЯ

E_N – множество наборов типов, для которых сообщение каждым агентом своего истинного типа является равновесием Нэша:

$$E_N = \{\ r \in \Re^n \mid \forall i \in N\ \forall s_i \in \Re^1\ \ f_i(h_i(r), r_i) \geq f_i(h_i(r_1, \ldots, r_{i-1}, s_i, r_{i+1}, \ldots, r_n), r_i)\ \}.$$

<u>Утверждение.</u> Для того, чтобы механизм планирования являлся рефлексивно неманипулируемым, достаточно, чтобы для любого i-го агента, $i \in N$, существовал набор типов $r' = (r'_1, \ldots, r'_n) \in E_N$ такой, что выполнено

$$r_i \in \operatorname*{Arg\,max}_{s_i \in \Re^1} f_i(h_i(r'_1, \ldots, r'_{i-1}, s_i, r'_{i+1}, \ldots, r'_n), r_i).$$

При этом для реализации рефлексивной неманипулируемости достаточно ограничиться не более чем вторым рангом рефлексии агентов.

1. Базовые модели принятия решений
2. Рефлексия и рефлексивные игры
3. Типы информационных равновесий
4. Информационные воздействия
5. Информационное управление
6. **Примеры**

ПРИКЛАДНЫЕ МОДЕЛИ ИНФОРМАЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ

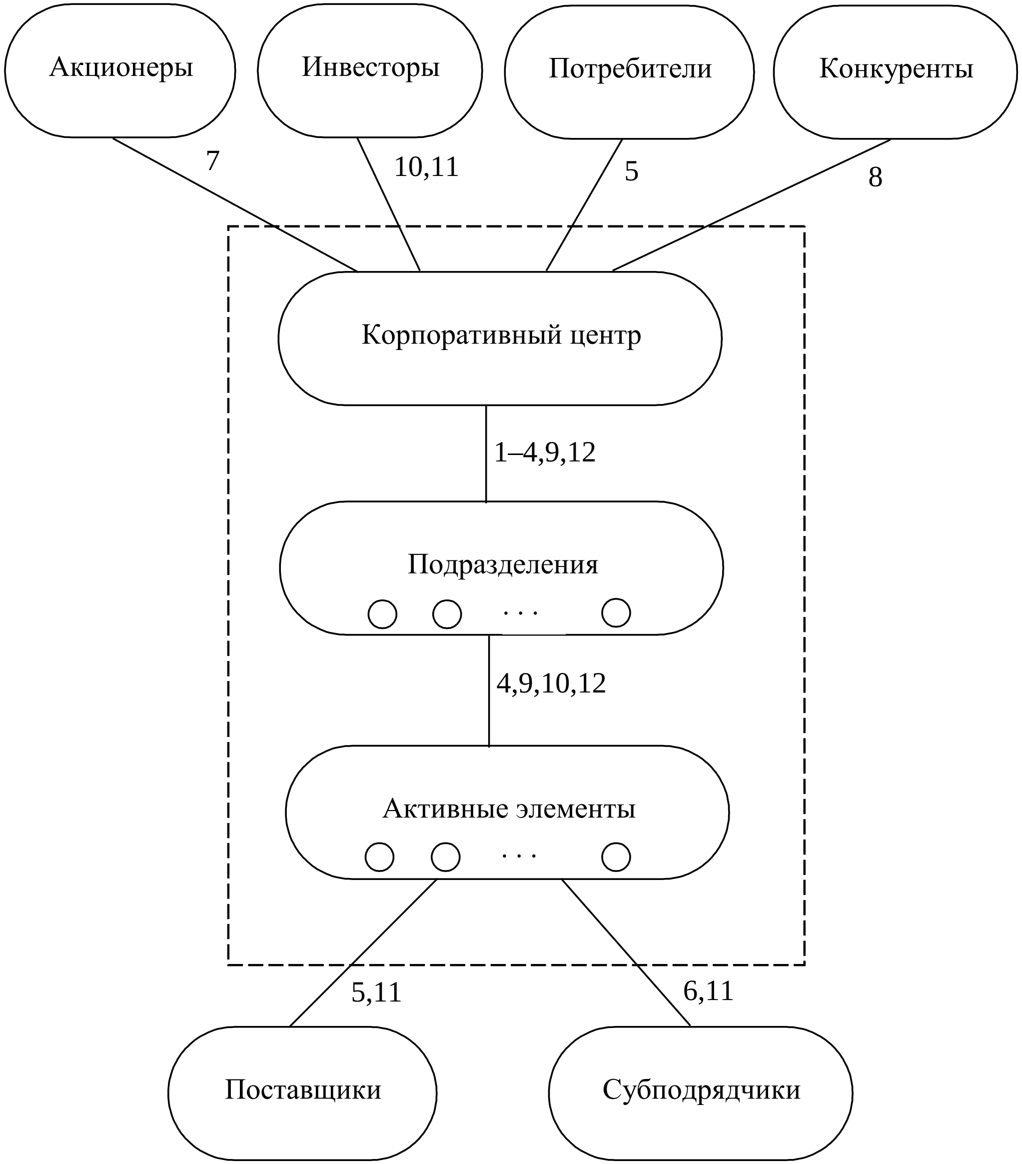
1. Корпоративное управление
    1.1. Производитель и посредник*
    1.2. Совместное производство*
    1.3. Конкуренция на рынке*
    1.4. Аккордная оплата труда*
    1.5. Продавец и покупатель*
    1.6. Заказчик и исполнитель*
    1.7. Активная экспертиза*
    1.8. Олигополия Курно**
    1.9. Распределение ресурса**
    1.10. Страхование*
    1.11. Конкурс**
    1.12. Формирование команды*
2. Игры поиска*
3. «Принцип дефицита»*
4. Коррупция**
5. Биполярный выбор*
6. Реклама товара*
7. Предвыборная борьба*

* – *множество исходов игры расширяется за счет ИУ*

** – *возможны только истинные стабильные равновесия, при этом представления агентов могут быть ложными*

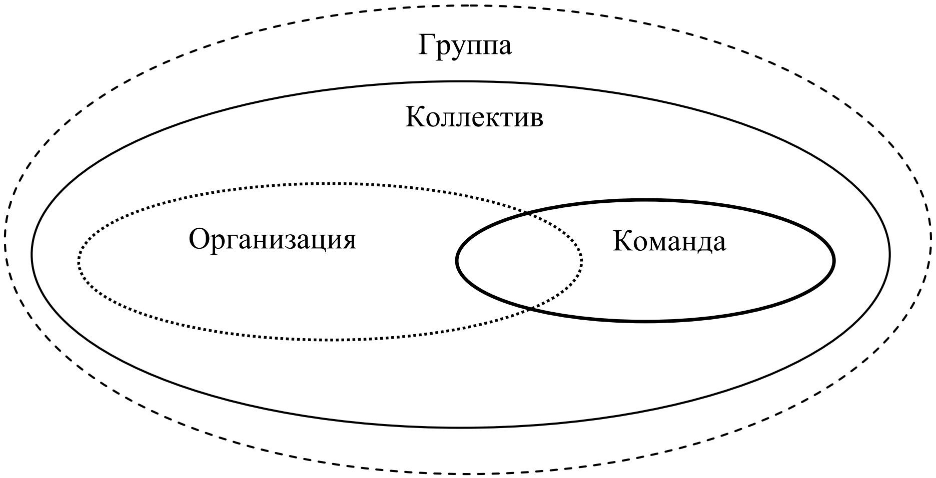
МОДЕЛЬ КОРПОРАЦИИ И МОДЕЛИ ИНФОРМАЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ

1. Производитель и посредник
2. Совместное производство
3. Конкуренция на рынке
4. Аккордная оплата труда
5. Продавец и покупатель
6. Заказчик и исполнитель
7. Активная экспертиза
8. Олигополия Курно
9. Распределение ресурса
10. Страхование
11. Конкурс
12. Формирование команды

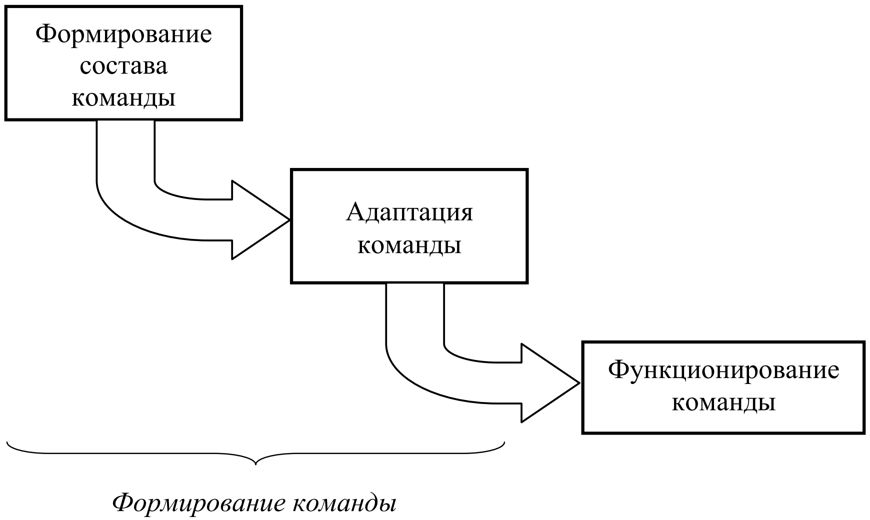


КОМАНДЫ

Команда – коллектив, способный достигать цели автономно и согласованно при минимальных управляющих воздействиях.
Группа – совокупность людей, объединенных общностью интересов, профессии, деятельности и т.п.
Коллектив – объединение людей, осуществляющих совместную деятельность и обладающих общими интересами.
Организационная система – объединение людей, совместно реализующих некоторую программу или цель и действующих на основе определенных процедур и правил.



Группа, коллектив, организация и команда



Этапы существования команд

«РЕФЛЕКСИВНЫЕ» МОДЕЛИ ФОРМИРОВАНИЯ КОМАНД

Рассмотрим команду $N = \{1, 2, \dots, n\}$, состоящую из n агентов. Действие i-го агента $y_i \geq 0$ требует от него затрат типа Кобба-Дугласа $c_i(y_i, r_i) = r_i\, \varphi(y_i / r_i)$, где $r_i > 0$ – тип агента, $\varphi(\cdot)$ – монотонная выпуклая функция. Предположим, что цель команды заключается в минимизации затрат по выбору вектора действий, сумма которых равна заданной величине.

Субъективная история игры	Структура информированности	
	$\{r_{ij}\}$	$\{r_{ijk}\}$
y_{-i}	Модель 1	Модель 6
c_{-i}	Модель 2	Модель 7
c	Модель 3	Модель 8
$(y_{-i};\ c_{-i})$	Модель 4	Модель 9
$(y_{-i};\ c)$	Модель 5	Модель 10

Предположим, что i-ый агент имеет структуру информированности $\{r_{ij}\}$ и наблюдает действия $\boldsymbol{x}_{-i}$ других агентов. Тогда:

Информационное равновесие: $y_i^*(\{r_{ij}\}) = r_i / \sum_{j \in N} r_{ij}$, $i \in N$.

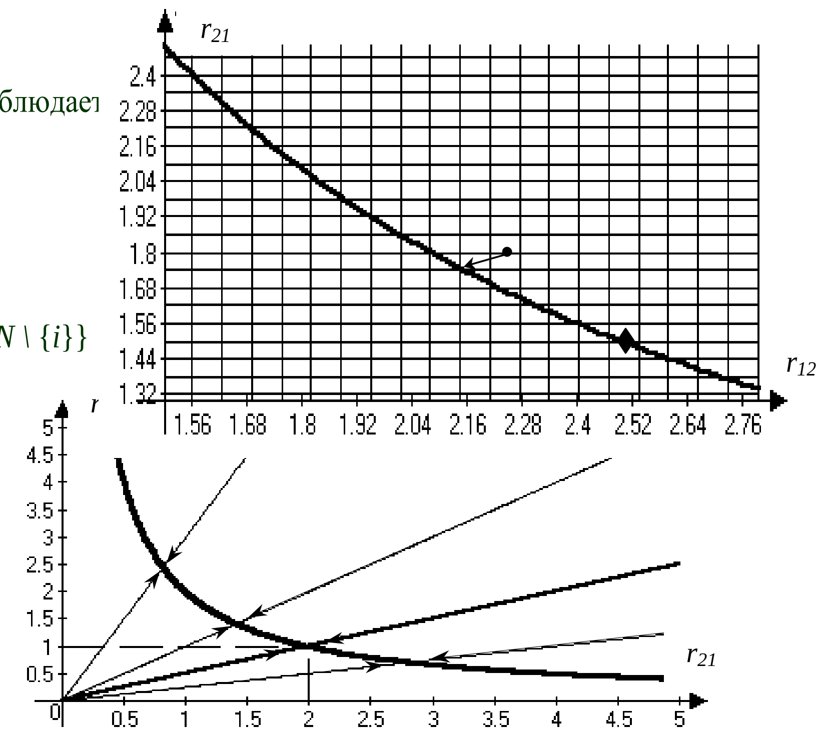
Рациональные представления: $\Omega_i^1 = \{r_{ij} > 0, j \in N \setminus \{i\} \mid r_{ij} / \sum_{l \in N} r_{il} = x_j,\ j \in N \setminus \{i\}\}$

Динамика представлений *i*-го агента:

$$r_{ij}^{t+1} = r_{ij}^t + \gamma_{ij}^t\,(w_{ij}^t(\boldsymbol{x}_{-i}^t) - r_{ij}^t),\ j \in N \setminus \{i\},\ t = 1, 2, \dots,\ i \in N,$$

где $w_{ij}^t(\boldsymbol{x}_{-i}^t)$ – j-ая проекция ближайшей к $(r_{ij}^t)_{j \in N \setminus \{i\}}$ точки множества Ω_i^1.

Условие стабильности (для $n = 2$): $r_1\, r_2 = r_{21}\, r_{12}$.



Множество субъективных равновесий и области притяжения

АККОРДНАЯ ОПЛАТА ТРУДА

n агентов осуществляют совместную деятельность

$x_i \geq 0$ – действие i-го агента

θ– суммарное действие агентов, за которое центр выплачивает вознаграждение (иначе не выплачивает ничего)

σ_i – вознаграждение i-го агента

$c_i(x_i)$ – затраты агентов (возрастающая функция, $c_i(0) = 0$)

$x_i^+ = \max \{ x_i \geq 0 \mid c_i(x_i) \leq \sigma_i \}$

В результате игры общим знанием среди агентов становится факт выплаты или невыплаты вознаграждения.

<u>Утверждение.</u> Любой набор действий

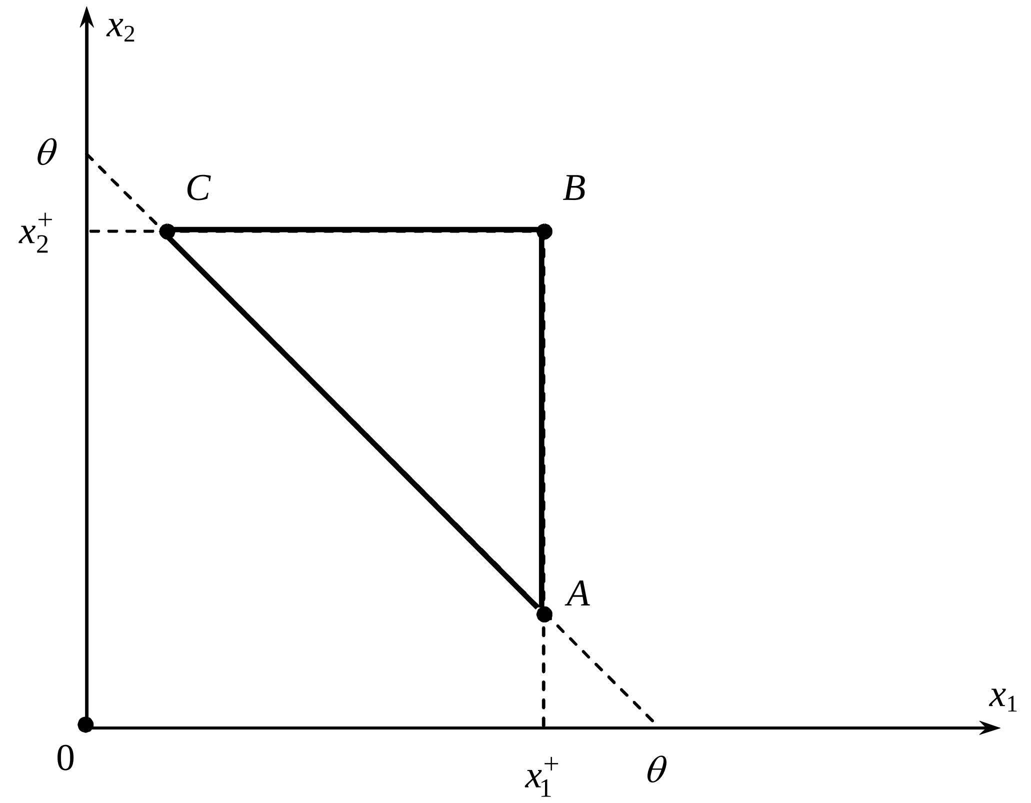
$$x^* \in \prod_{i \in N} (0; x_i^+), \quad \sum_{i \in N} x_i^* \geq \theta,$$

можно сделать стабильным (и притом единственным) информационным равновесием в рамках структуры информированности глубины 2.

АККОРДНАЯ ОПЛАТА ТРУДА. МНОЖЕСТВО РАВНОВЕСИЙ

Отрезок AC – множество равновесий Нэша

Область ABC – множество стабильных информационных равновесий



«ПРИНЦИП ДЕФИЦИТА»

Чалдини Р. Психология влияния.

Три типа клиентов (закупщиков импортной говядины для супермаркетов):

1. услышали предложение, сделанное в стандартной форме;
2. дополнительно была предоставлена информация о том, что поставки импортной говядины будут сокращены;
3. те же сведения, что и вторая группа, а также информацию о том, что мало кто узнает о предстоящем сокращении поставок.

Результат информационного управления:

клиенты типа 2 заказали в 2 раза больше, чем клиенты типа 1;

клиенты типа 3 заказали в 6 раза больше, чем клиенты типа 1.

«ПРИНЦИП ДЕФИЦИТА». ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ АГЕНТОВ

n агентов (клиентов) с целевыми функциями

$$f_i(x_1,...,x_n) = (Q - \sum_{j \in N} x_j)\, x_i - c x_i,$$

где $x_i \geq 0$, $i \in N = \{1, \ldots, n\}$, $c \geq 0$.

x_i – объем продаж агента за период времени

$(Q - \sum_{j \in N} x_j)$ – цена, которая при этом устанавливается на рынке

c – оптовая цена, по которой агенты закупают товар

$x_i = \dfrac{Q - c}{n+1}$ – действие агентов типа 1 (равновесие в обычных условиях)

$2x_i$ – действие агентов типа 2, считающих прекращение поставок общим знанием

$6x_i$ – действие агентов типа 3, считающих себя инсайдерами (а долю инсайдеров равной пятой части от общего числа агентов)

РЕФЛЕКСИВНАЯ НЕМАНИПУЛИРУЕМОСТЬ МЕХАНИЗМОВ ПЛАНИРОВАНИЯ

Пример манипулируемого, но рефлексивно неманипулируемого механизма:

два агента с типами r_1 , $r_2 \geq 0$, механизм $x_1 = s_1 - s_2/2$, $x_2 = s_2 - s_1/2$.

Равновесные по Нэшу стратегии (заявки):

$s_1^*(r_1, r_2) = 2\,(2\,r_1 + r_2)/3$, $s_2^*(r_1, r_2) = 2\,(2\,r_2 + r_1)/3$.

Нетрудно видеть, что

$s_i^* = r_i$ при $r_{i\sigma} = 0$, $i = 1,2$, $\sigma \in \Sigma_+$.

БИПОЛЯРНЫЙ ВЫБОР: СТОРОННИКИ, КОЛЕБЛЮЩИЕСЯ, ПРОТИВНИКИ

Агенты из бесконечно большой «популяции» выбирают между позитивным и негативным полюсами.

Сторонники (их доля в популяции α_1): $x_1 = 1$.

Противники (их доля в популяции α_3): $x_3 = 0$.

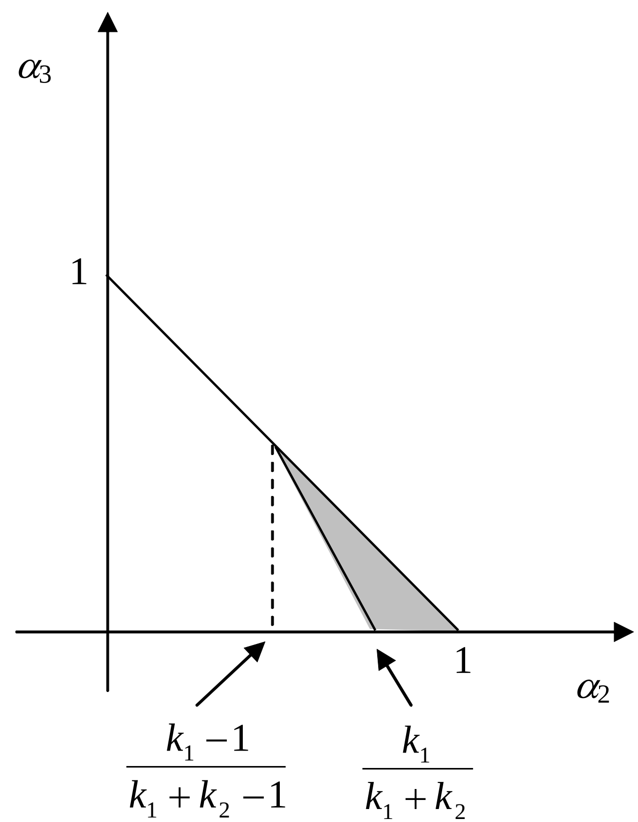
Колеблющиеся (их доля в популяции α_2) поступают так, как ожидают от «среднестатистического» члена популяции: $x_2 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$.

Центр стремится максимизировать вероятность позитивного выбора. Он может

1. повлиять на третью группу, переведя долю y ее членов во вторую и затратив ресурс $C_2 y$;
2. повлиять на вторую группу, изменив представления ее членов об α_3 и затратив ресурс $C_1 x$.

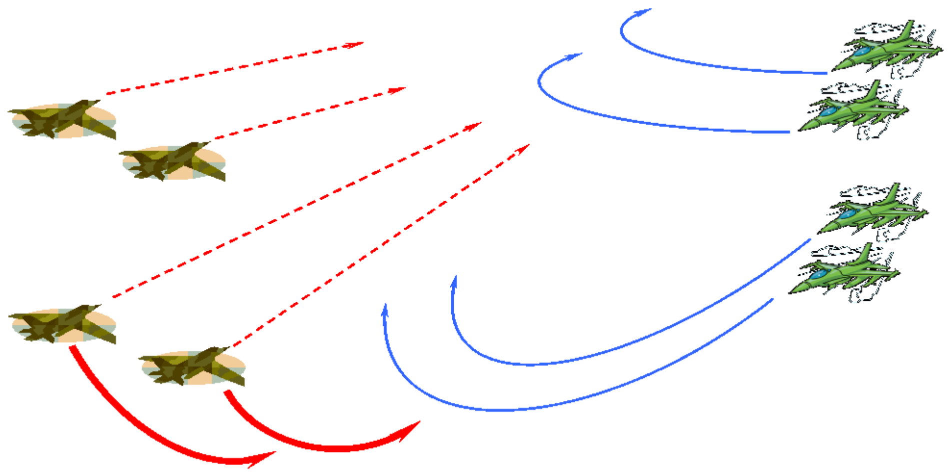
Совокупный ресурс (бюджет) центра составляет C.

На рисунке затемнена область, где оптимально весь ресурс направить на изменение представлений агентов второй группы.



$k_i = C_i / C > 1$, $i = 1, 2$

РЕФЛЕКСИВНАЯ МОДЕЛЬ ГРУППОВОГО ВОЗДУШНОГО БОЯ; ИНФОРМАЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ЭКСПЕРТИЗЕ



Манипулирование результатами экспертизы. Предположим, что центр заинтересован в том, чтобы результат экспертизы был как можно ближе к значению $x_0 \in [d;D]$. Пусть центру известны мнения n экспертов $\{r_i \in [d;D]\}_{i \in N}$, но никому из них не известны достоверно мнения остальных. Принимаемое решение $x = \pi(s)$, где $s \in [d;D]^n$ – вектор сообщений экспертов. Обозначим: $x_{0i}(a,r_i)$ – решение уравнения $\pi(a, \ldots, x_0, \ldots, a) = r_i$,

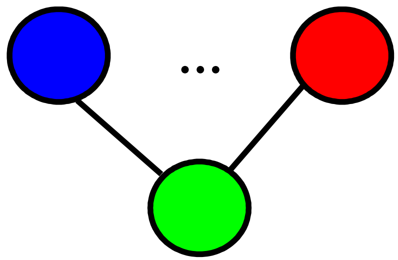
$$d_i(r_i) = \max\{d;\ x_{0i}(D, r_i)\},\ D_i(r_i) = \min\{D;\ x_{0i}(d, r_i)\},$$

$$d(r) = (d_1(r_1), d_2(r_2), \ldots, d_n(r_n)),\ \ D(r) = (D_1(r_1), D_2(r_2), \ldots, D_n(r_n)).$$

Утверждение. Если мнение каждого эксперта известно организатору экспертизы, но неизвестно другим экспертам, то за счет рефлексивного управления любой результат $x_0 \in [\pi(d(r));\pi(D(r))]$ может быть реализован как коллективное решение. При этом достаточно ограничиться вторым рангом рефлексии экспертов.

ИНФОРМАЦИОННОЕ ПРОТИВОБОРСТВО И ИНФОРМАЦИОННАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ

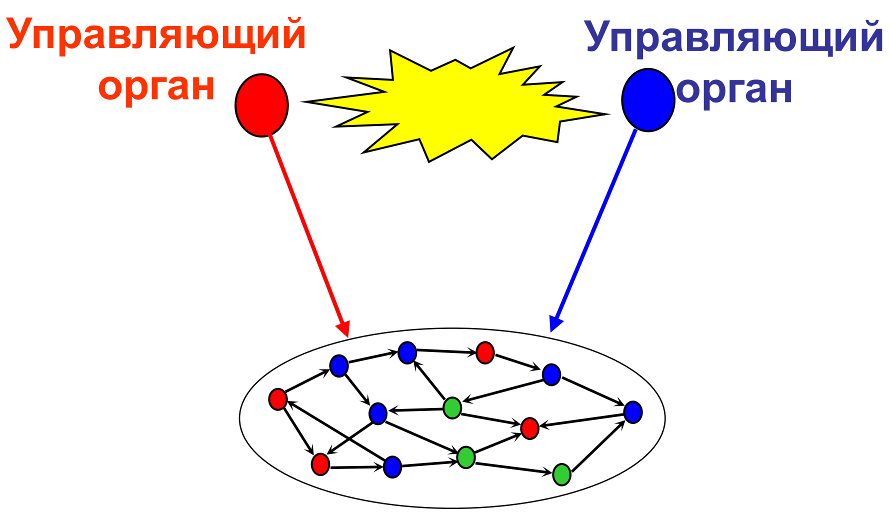
СИСТЕМА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ КОНТРОЛЕМ



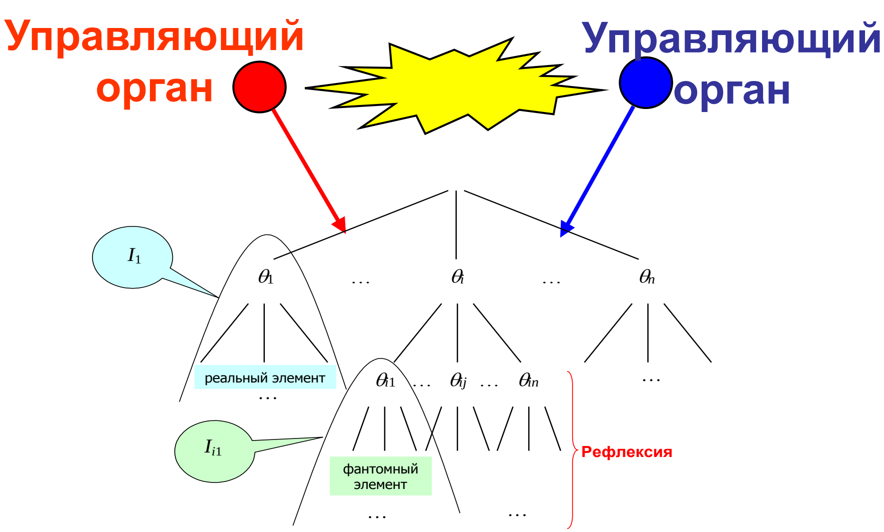
ПРИЛОЖЕНИЯ:

- Информационные войны;
- Социальные сети;
- Информационная безопасность;
- Корпоративные информационные системы;
- и др.

«КОГНИТИВНЫЕ» ИГРЫ



Управляемый субъект



Управляемый субъект