24. МЕХАНИЗМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ ПЕРСОНАЛА

Новиков Дмитрий Александрович - д.т.н., профессор, член-корреспондент РАН, заместитель директора Института проблем управления РАН, профессор МФТИ

Коргин Николай Андреевич - к.т.н., ведущий научный сотрудник Института проблем управления РАН, доцент МФТИ

ПЛАН

1. ВВЕДЕНИЕ. ЗАДАЧА СОГЛАСОВАНИЯ ИНТЕРЕСОВ

2. ЗАДАЧА СТИМУЛИРОВАНИЯ ОДНОГО АГЕНТА

3. БАЗОВЫЕ МЕХАНИЗМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ

4. ЗАДАЧА СТИМУЛИРОВАНИЯ КОЛЛЕКТИВА АГЕНТОВ

5. ЗАДАЧА СТИМУЛИРОВАНИЯ В УСЛОВИЯХ ВЕРОЯТНОСТНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

6. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМ СТИМУЛИРОВАНИЯ

1. ВВЕДЕНИЕ. ЗАДАЧА СОГЛАСОВАНИЯ ИНТЕРЕСОВ

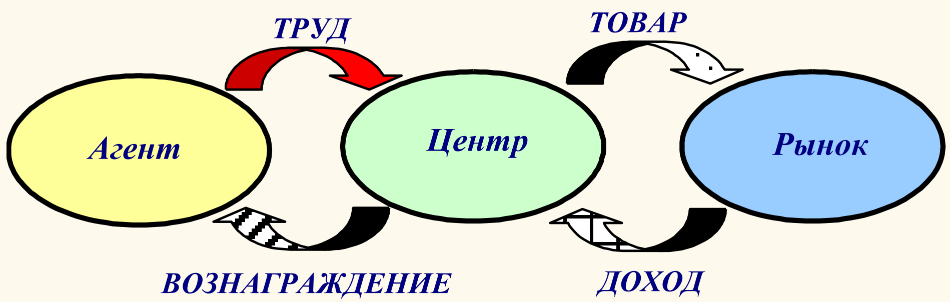
Стимулирование (мотивация) с точки зрения различных наук. Стимулирование изучается в таких областях науки как экономика, психология, управление и др.

По «масштабу» рассмотрения и применяемым методам можно выделить следующие взаимосвязанные **подходы**:

- «*макроэкономический*», в котором в центре внимания находится рынок труда;

- «*микроэкономический*», в котором акцент делается на рассмотрении стимулирования в рамках организации (предприятия, ведомства, фирмы и т.д.), причем основой является анализ именно экономической деятельности (как индивидуальной, так и коллективной);

- «*агентный*», в котором центром рассмотрения является человек, группа, коллектив и т.д. с их потребностями и интересами.

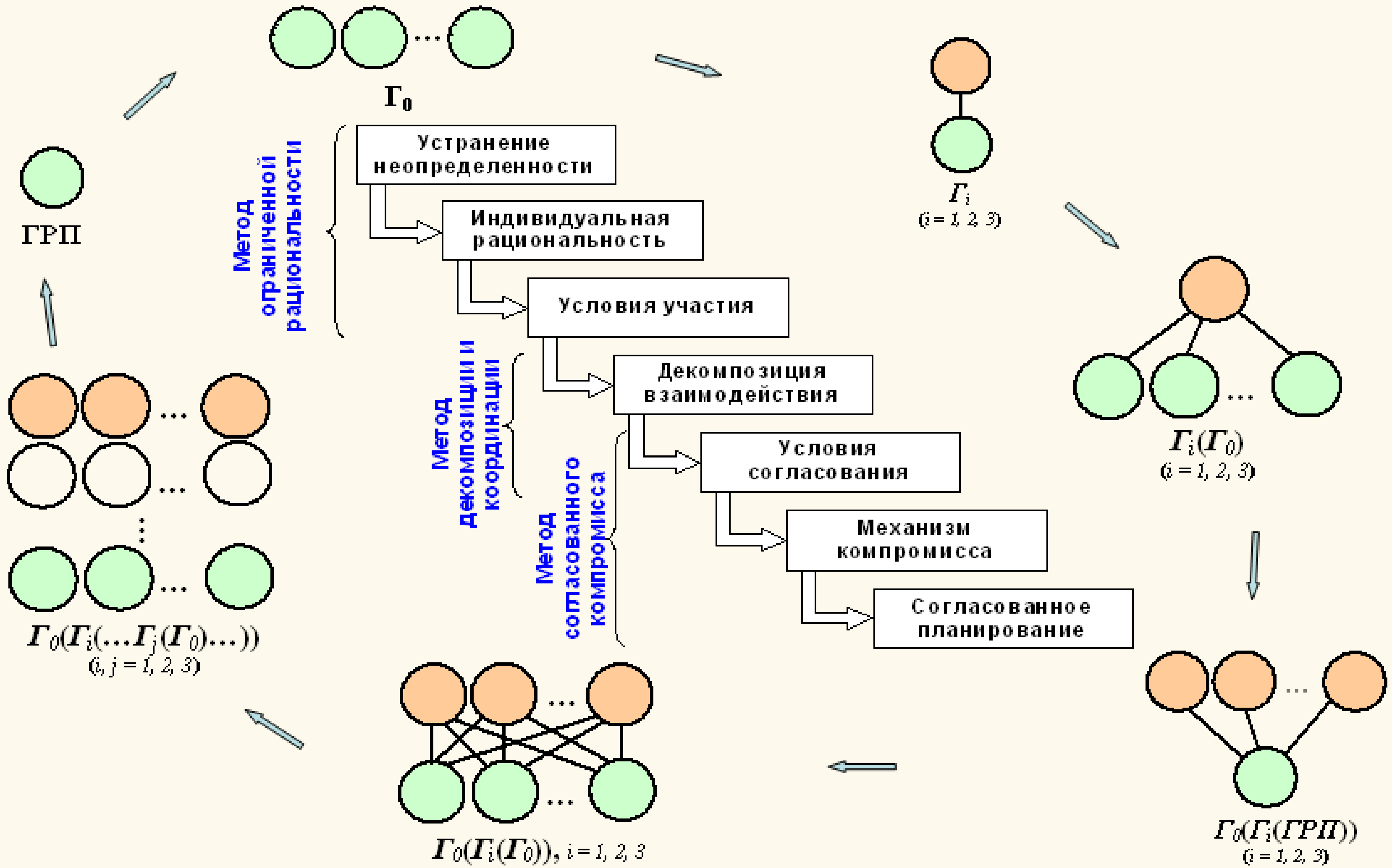


Участники трудовых отношений

Два вида экономических агентов – субъектов экономики:
- ➢ хозяйствующий субъект рынка (примеры – организация, холдинг, фирма, корпорация);
- ➢ сотрудник(и) хозяйствующего субъекта.

Полезность для агентов обоих видов может быть определена как **«экономическая прибыль»** – разность между «доходом» и «затратами». Рациональный (активный) агент ведет себя таким образом, чтобы максимизировать свою полезность. Но содержание и методы представления доходов и затрат зависят от вида агента.

ЗАДАЧА СОГЛАСОВАНИЯ ИНТЕРЕСОВ. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ



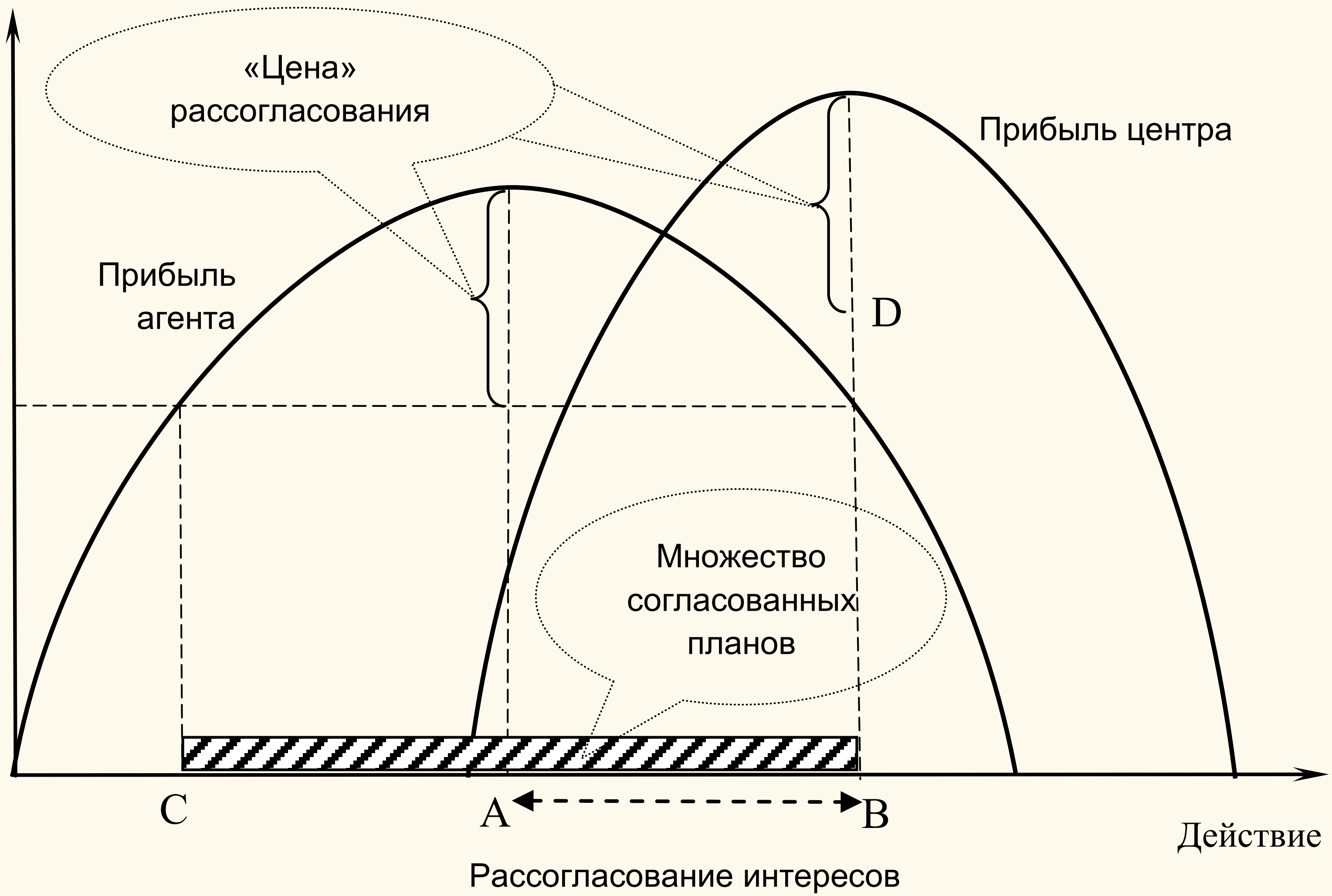
ГРП - гипотеза рационального поведения, Г – игра (0 – в нормальной форме; 1, 2, 3 – иерархические игры)

МЕХАНИЗМ СОГЛАСОВАНИЯ ИНТЕРЕСОВ

Механизм согласования интересов (за счет стимулирования). Одним из основных принципов эффективного управления организационными системами является **согласование интересов** участников системы – Центра и агента. Интересы участников выражены их целевыми функциями (синоним – функция полезности) – например, зависимостью прибыли от действий агента. На рисунке представлены графики целевых функций Центра и агента. По горизонтали отложено количественно выраженное действие агента (например, объем выпуска), по вертикали – целевая функция, большее значение которой соответствует большей предпочтительности того или иного действия для Центра и агента соответственно. Предположим, что интерес Центра состоит в максимизации операционной прибыли от деятельности агента – разницы выручки и суммы оплаты труда.

Пусть максимум целевой функции агента достигается при выборе им действия *A*. Для Центра наиболее выгодно действие *B*. Если Центр назначит агенту **план** – точку *B*, то агент такой план не выполнит, так как он ему не выгоден. Следовательно, Центру следует предложить дополнительно доплатить агенту за выбор действия, совпадающего с планом. Какова должна быть величина этой доплаты? Очевидно, не меньше так называемой **«цены рассогласования»**, то есть потерь агента, связанных с выполнением плана *B* по сравнению с выбором действия *A*.

РАССОГЛАСОВАНИЕ ИНТЕРЕСОВ

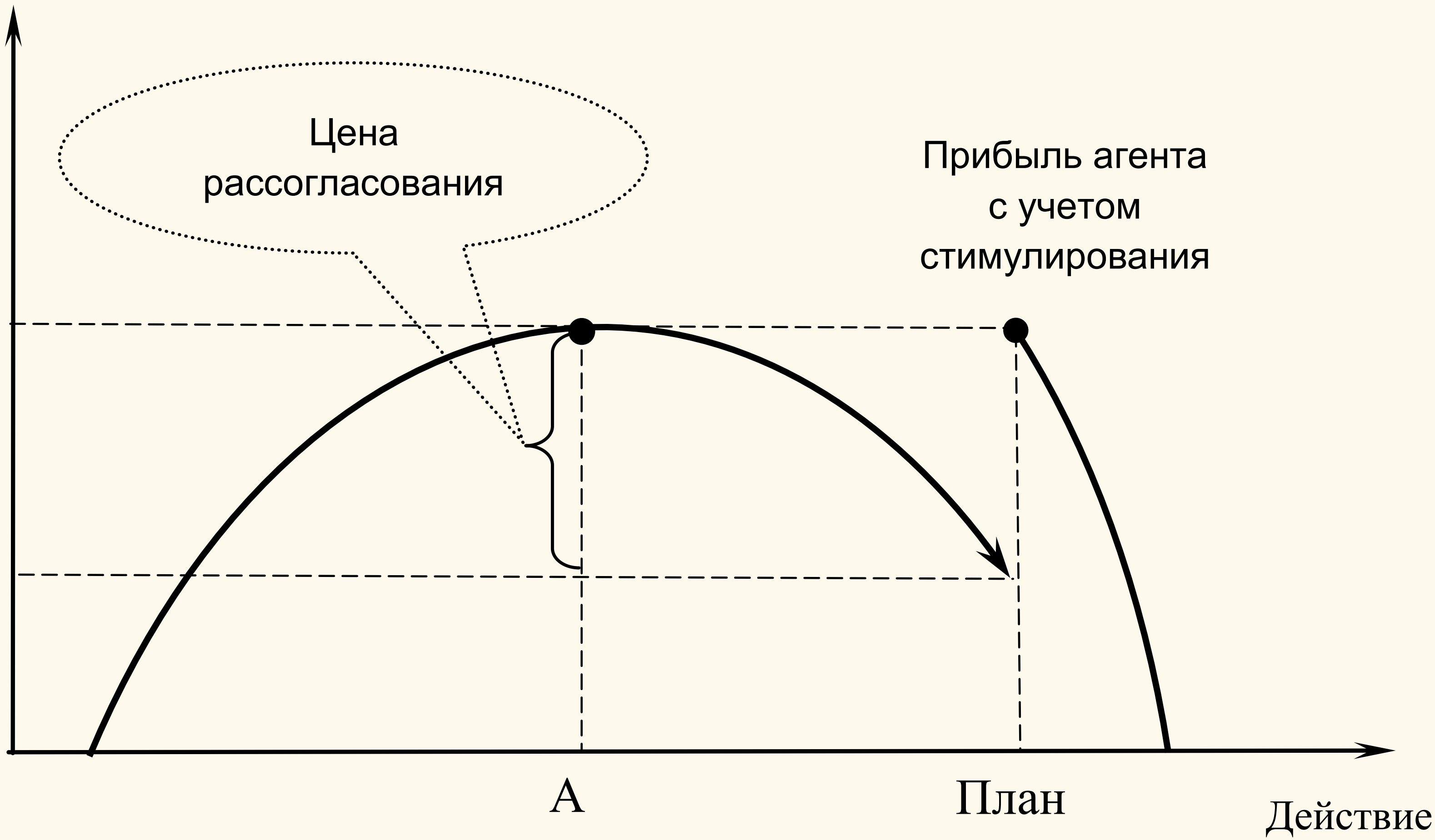


ИДЕЯ СОГЛАСОВАНИЯ

Основная идея согласования интересов за счет стимулирования Центром агента заключается в том, что, выплачивая вознаграждение за выбор требуемых ему действий, Центр делает для агента выгодным выбор именно этих действий. Например, пообещав дополнительно заплатить агенту за выбор точки *B* сумму, равную «цене рассогласования», Центр сделает для агента одинаково выгодным выбор как точки *A*, так и точки *B*.

При использовании Центром скачкообразной системы стимулирования с вознаграждением, равным «цене рассогласования», и плане *B* агенту выгодно выполнять план, так как теперь максимум его прибыли достигается в двух точках – *A* и *B* – и при прочих равных он выполнит план (поведение агента, при котором из равноценных для него действий он выбирает действие, наиболее выгодное для Центра, называется **гипотезой благожелательности**).

ПРИБЫЛЬ АГЕНТА ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ЦЕНТРОМ СКАЧКООБРАЗНОЙ СИСТЕМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ

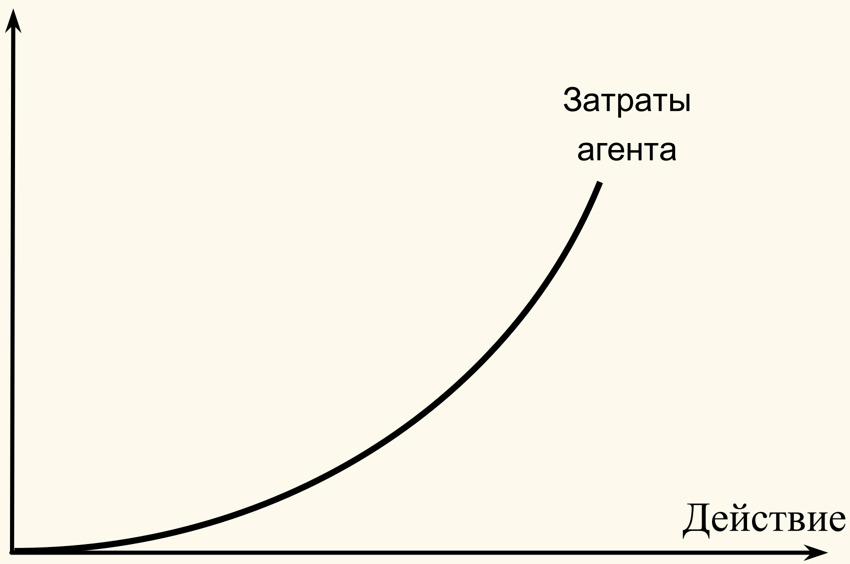


Казалось бы, скачкообразная система стимулирования, позволяет согласовать интересы Центра и агента. Но какой ценой?! Следует вспомнить про Центр, из прибыли которого вычитается вознаграждение, выплачиваемое агенту. Назначая план в точке B и выплачивая агенту за его выполнение вознаграждение, равное «цене рассогласования», Центр уменьшает свою полезность до величины, соответствующей точке D. То есть, выполнение агентом плана становится невыгодным уже для Центра. Что же делать? Другими словами, ограничив сверху размер вознаграждения «ценой рассогласования», Центр может побудить агента выбрать любое действие из **множества согласованных** (для агента) **планов**, заштрихованного на первом рисунке. Какое действие Центру следует назначать в качестве плана, и каков должен быть размер вознаграждения за его выполнение?

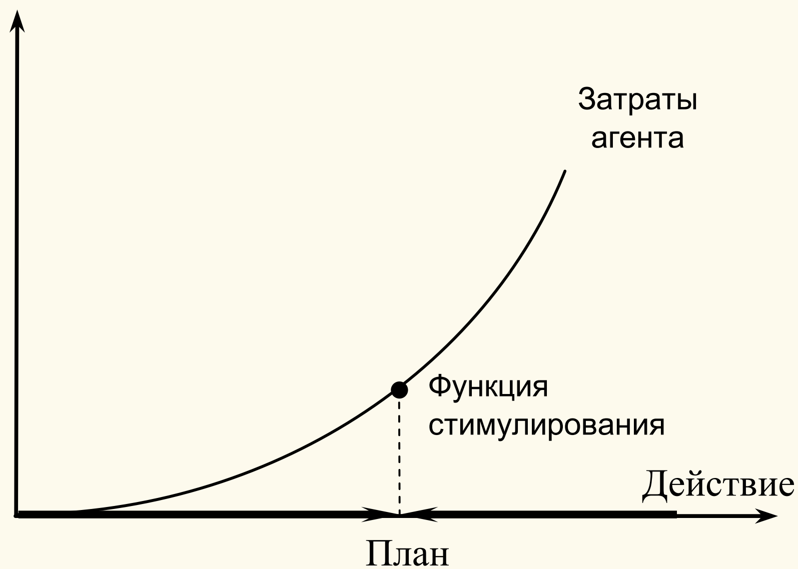
Конкретизируем задачу. Предположим, что агент осуществляет выбор своего действия (например, объема производимой продукции). Выбор определенного действия требует от агента соответствующих затрат. Центр осуществляет стимулирование агента, выплачивая ему вознаграждение, равное затратам, в случае, если действие совпадет с планом, в противном случае вознаграждение равно нулю. Такая система (функция) стимулирования называется **компенсаторной**. Компенсаторные системы стимулирования (с теми или иными модификациями, основывающимися на различных нормативах рентабельности) широко распространены, в основном, при взаимодействии заказчиков и исполнителей.

ЗАТРАТЫ АГЕНТА И КОМПЕНСАТОРНАЯ ФУНКЦИЯ СТИМУЛИРОВАНИЯ

Институт Проблем Управления РАН



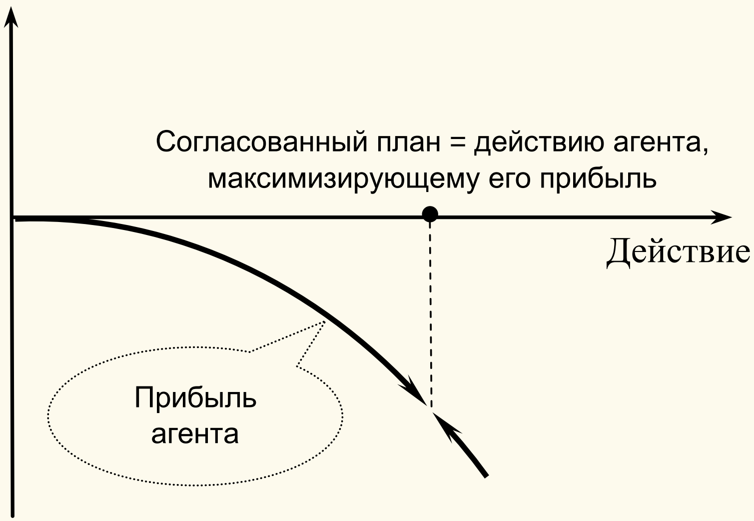
Затраты агента

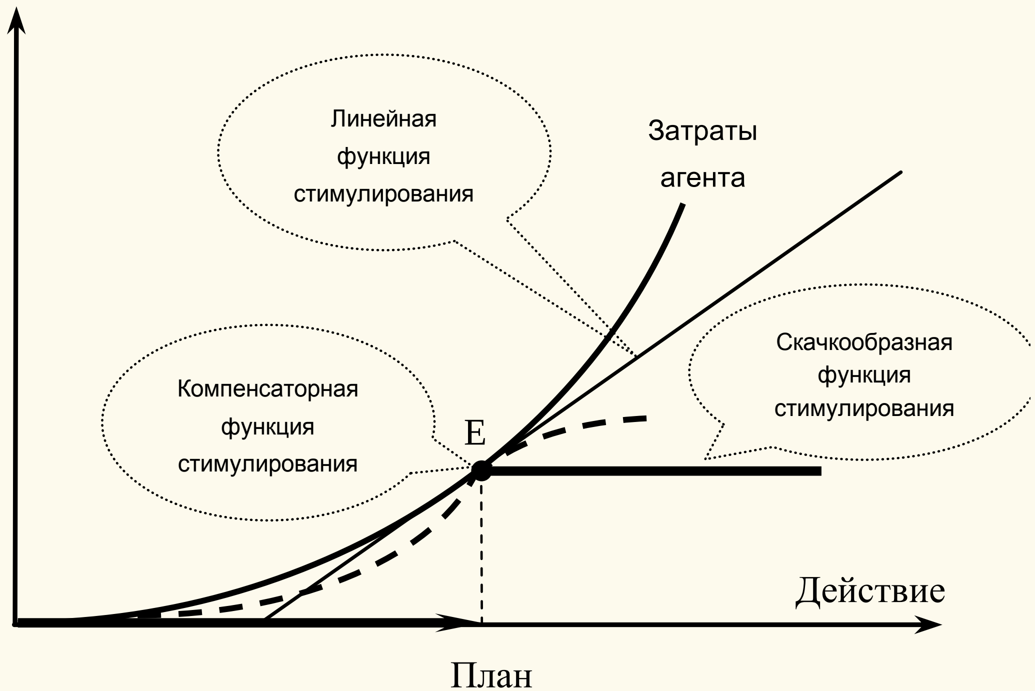


Компенсаторная функция стимулирования

Рациональный агент заинтересован в максимизации своей прибыли (разности между стимулированием и затратами). То есть при фиксированной системе стимулирования он выберет действие, доставляющее максимум его прибыли. А максимум его прибыли достигается при выборе действия, совпадающего с планом! Такой план (выполнение которого выгодно агенту) называется **согласованным планом** (планом, согласованным с интересами агента).

ОПТИМАЛЬНЫЕ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ЦЕНТРА ФУНКЦИИ СТИМУЛИРОВАНИЯ (ПРИ ЗАДАННОМ ПЛАНЕ)





2. ЗАДАЧА СТИМУЛИРОВАНИЯ ОДНОГО АГЕНТА

МЕХАНИЗМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ

Стимулированием называется побуждение (осуществляемое посредством воздействия центра на предпочтения – целевую функцию – агента) к совершению определенных действий.

Последовательность изложения следующая:

- задача стимулирования одного агента (в непрерывной и дискретной постановке);
- базовые механизмы стимулирования, отражающие наиболее распространенные на практике формы и системы оплаты труда;
- механизмы стимулирования в теории контрактов (задаче стимулирования одного агента в условиях вероятностной неопределенности относительно результатов его деятельности);
- механизмы стимулирования коллектива агентов, осуществляющих совместную деятельность.

Механизм стимулирования (непрерывная модель)

Стратегией агента является выбор *действия* $y \in A$, принадлежащего множеству допустимых действий A.

Механизмом стимулирования называется правило принятия центром решений относительно стимулирования агента.

Механизм стимулирования включает в себя *систему стимулирования*, которая в рамках моделей, рассматриваемых в данной лекции, полностью определяется *функцией стимулирования.*

Функция стимулирования задает зависимость вознаграждения агента, получаемого им от центра, от выбираемых действий.

Термины «механизм стимулирования», «система стимулирования» и «функция стимулирования» используются ниже как синонимы.

Стратегией центра является выбор *функции стимулирования* $\sigma(\cdot) \in M$, принадлежащей допустимому множеству M и ставящей в соответствие действию агента некоторое неотрицательное вознаграждение, выплачиваемое ему центром, то есть $\sigma : A \to \Re^1_+$.

Выбор действия $y \in A$ требует от агента *затрат* $c(y)$ и приносит центру *доход* $H(y)$.

Целевая функции агента:

$f(y) = \sigma(y) - c(y)$,

Целевая функции центра:

$\Phi(y) = H(y) - \sigma(y)$

Предположения:

- множество возможных действий агента составляет положительную полуось. Отказу агента от участия в рассматриваемой ОС (бездействию) соответствует нулевое действие;
- функция затрат агента не убывает, непрерывна, а затраты от выбора нулевого действия равны нулю (иногда дополнительно будем требовать, чтобы функция затрат была выпукла и непрерывно дифференцируема);
- функция дохода центра непрерывна, принимает неотрицательные значения, а доход центра достигает максимума при ненулевых действиях агента;
- значение вознаграждения, выплачиваемого центром агенту, неотрицательно.

- На момент принятия решения (выбора стратегии) участникам ОС известны все целевые функции и все допустимые множества.
- Центр обладает правом первого хода, сообщая агенту выбранную им функцию стимулирования, после чего при известной стратегии центра агент выбирает свое действие, максимизирующее его целевую функцию (игра Γ_2 с побочными платежами в терминологии теории иерархических игр).

Множество действий агента, доставляющих максимум его целевой функции (и, естественно, зависящее от функции стимулирования), называется *множеством решений игры,* или *множеством действий, реализуемых данной системой стимулирования* (с учетом резервной полезности $\overline{U} \geq 0$): $P(\sigma, \overline{U}) = Arg \max\limits_{\{y \in A \mid \sigma(y) \geq c(y) + \overline{U}\}} \{\sigma(y) - c(y)\}$.

Эффективность системы стимулирования $\sigma \in M$ (выполнена *гипотеза благожелательности* (ГБ)): $K(\sigma) = \max\limits_{y \in P(\sigma)} \Phi(y)$

Гарантированная эффективность $K_g(\cdot)$ системы стимулирования $\sigma \in M$ (ГБ не выполнена):

$$K_g(\sigma) = \min_{y \in P(\sigma)} \Phi(y).$$

Прямая задача синтеза оптимальной системы стимулирования заключается в выборе допустимой системы стимулирования, имеющей максимальную эффективность: $K(\sigma) \to \max\limits_{\sigma \in M}$

Обратная задача стимулирования заключается в поиске множества систем стимулирования, реализующих заданное действие, или заданное множество действий $A^* \subseteq A$. Например, при $A^* = \{y^*\}$ обратная задача может заключаться в поиске множества $M(y^*)$: $M(y^*) = \{\sigma \in M \mid y^* \in P(\sigma)\}$.

МОДЕЛЬ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ АГЕНТОМ

Центр предлагает агенту контракт $\{\sigma(y), y^*\}$

Принципы принятия решения агентом:

- *условие согласованности стимулирования* (*incentive compatibility constraint*), которое заключается в том, что при участии в контракте выбор именно действия y^* (а не какого-либо другого допустимого действия) доставляет максимум его целевой функции.
- *условие участия* в контракте (*условием индивидуальной рациональности* (ИР) – *individual rationality constraint*), которое заключается в том, что, заключая данный контракт, агент ожидает получить полезность, большую, чем он мог бы получить, заключив другой контракт с другой организацией (с другим центром). Представления агента о своих возможных доходах на рынке труда отражает такая величина, как *резервная заработная плата*.

Принципы принятия решения центром:

- согласованность системы стимулирования с интересами и предпочтениями центра – применение именно фигурирующей в контракте системы стимулирования должно доставлять максимум целевой функции (функции полезности) центра (по сравнению с использованием любой другой допустимой системы стимулирования).
- заключение контракта с данным агентом выгодно для центра по сравнению с сохранением статус-кво, то есть отказом от заключения контракта вообще.

Предположим, что использовалась система стимулирования $\sigma(\cdot)$, при которой агент выбирал действие $x \in P(\sigma(\cdot))$.

Утверждение: если взять другую систему стимулирования $\tilde{\sigma}(\cdot)$, которая будет равна нулю всюду, кроме точки *x*, и будет равна старой системе стимулирования в точке *x*:

$$\tilde{\sigma}(y) = \begin{cases} \sigma(x), & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases},$$

то и при новой системе стимулирования это же действие агента будет доставлять максимум его целевой функции.

Условие того, что выбор действия *x* доставляет максимум целевой функции агента при использовании системы стимулирования $\sigma(\cdot)$:

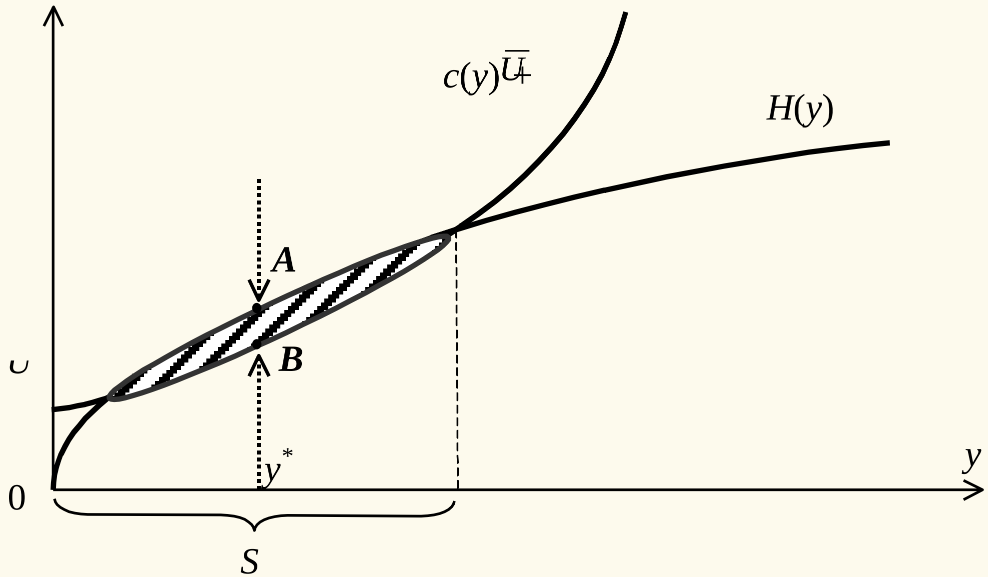
$$\forall y \in A \;\; \sigma(x) - c(x) \geq \sigma(y) - c(y).$$

Заменим систему стимулирования $\sigma(\cdot)$ на систему стимулирования $\tilde{\sigma}(\cdot)$, тогда получим следующее: в точке *x* система стимулирования $\tilde{\sigma}(\cdot)$ по-прежнему равна системе стимулирования $\sigma(\cdot)$. В правой части будет тогда записана система стимулирования $\tilde{\sigma}(\cdot)$:

$$\forall y \in A \;\; \sigma(x) - c(x) \geq 0 - c(y).$$

Если выполнялась первая система неравенств, то выполняется и новая система неравенств. Следовательно, $x \in P(\tilde{\sigma}(\cdot))$.

Область компромисса



Оптимальное решение задачи стимулирования

Область компромисса: множество действий агента и соответствующих значений целевых функций, удовлетворяющих одновременно всем перечисленным выше ограничениям (согласования, индивидуальной рациональности и другим, как для центра, так и для агента). Множество действий агента, при которых область компромисса не пуста, есть

$$S = \{x \in A \mid H(x) - c(x) - \bar{U} \geq 0\}.$$

ПРИНЦИП КОМПЕНСАЦИИ ЗАТРАТ, МОТИВИРУЮЩАЯ НАДБАВКА И ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО СОГЛАСОВАНИЯ

Принцип компенсации затрат: в рамках гипотезы благожелательности ***стимулирование в точности должно равняться сумме затрат агента и резервной полезности.***

Кроме компенсации затрат, центр может устанавливать также *мотивирующую надбавку* $\delta \geq 0$. Для того чтобы агент выбрал действие $x \in A$, стимулирование со стороны центра за выбор этого действия должно быть не меньше

$$\sigma(x) = c(x) + \overline{U} + \delta.$$

Параметрическое (с параметром $x \in S$) решением прямой задачи стимулирования является *компенсаторной* (К-*типа*) система стимулирования:

$$\sigma_K(x, y) = \begin{cases} c(x) + \overline{U} + \delta, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}$$

которая называется

Задача оптимального согласованного планирования – задача выбора оптимального для центра действия агента $x \in S$:

$$y^* = arg \max_{x \in S} \{H(x) - c(x)\}.$$

План – желательное с точки зрения центра действие агента. В силу принципа компенсации затрат план является *согласованным*.

Значение целевой функции центра при использовании оптимальной компенсаторной системы стимулирования в рамках гипотезы благожелательности равно:

$$\Delta = \max_{x \in S} \{H(x) - c(x)\}.$$

УСЛОВИЕ ОПТИМУМА

Условие оптимальности плана y^* в рассматриваемой модели (в предположении дифференцируемости функций дохода и затрат, а также вогнутости функции дохода центра и выпуклости функции затрат агента) имеет вид:

$$\frac{dH(y^*)}{dy} = \frac{dc(y^*)}{dy}.$$

$\frac{dH(y)}{dy}$ – в экономике – предельная производительность (*MRP – marginal rate of production*)

$\frac{dc(y)}{dy}$ – в экономике – предельные затраты (*MC – marginal costs*).

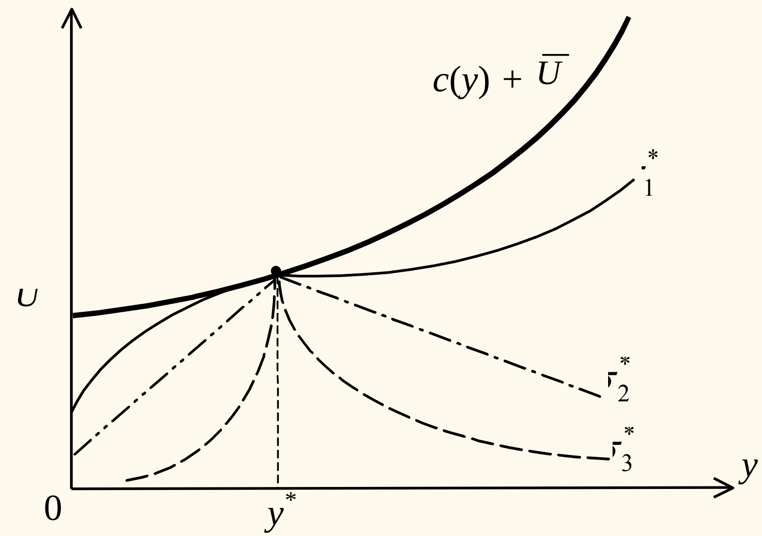
Условие оптимума (*MRP* = *MC*) определяет действие y^* и так называемую *эффективную заработную плату* $c(y^*) + \overline{U}$.

Оптимальный план y^* максимизирует разность между доходом центра и затратами агента, то есть доставляет максимум суммы целевых функций участников ОС, и, следовательно, является эффективным по Парето.

Непустота области компромисса отражает наличие возможности согласования интересов центра и агента в существующих условиях.

ОПТИМАЛЬНОСТЬ ПРОИЗВОЛЬНЫХ СИСТЕМ СТИМУЛИРОВАНИЯ

Компенсаторная система стимулирования не является единственной оптимальной системой стимулирования – легко показать, что в рамках гипотезы благожелательности решением задачи синтеза оптимальной системы стимулирования является любая система стимулирования $\breve{\sigma}(\cdot)$, удовлетворяющая следующему условию: $\breve{\sigma}(y^*) = c(y^*) + \overline{U}$, $\forall\, y \neq y^*$ $\breve{\sigma}(y) \leq c(y)$:



Оптимальным является класс систем стимулирования, реализующий любое действие агента с минимальными затратами центра на стимулирование.

Минимальными затратами центра на стимулирование по реализации действия $y \in P_M$ в классе допустимых систем стимулирования M называется следующая величина:

$$\sigma_{min}(y) = \min_{\sigma \in M} \{\sigma(y) \mid y \in P(\sigma), H(y) - \sigma(y) \geq 0\}.$$

Для тех действий, которые не могут быть реализованы в классе M, положим минимальные затраты на стимулирование равными бесконечности:

$$\sigma_{min}(y) = +\infty,\ y \in A \setminus P_M.$$

Очевидно, что в рамках введенных предположений принцип компенсации затрат можно сформулировать следующим образом: $\forall\ y \in P_M\ \ \sigma_{min}(y) = c(y)$.

Этапы решения задачи стимулирования

Решение задачи стимулирования может быть разделено на два этапа.

На *первом этапе* решается *задача согласования* – определяются множества реализуемых при заданных ограничениях действий.

На *втором этапе* решается *задача оптимального согласованного планирования* – ищется реализуемое действие, которое наиболее предпочтительно с точки зрения центра. Подобная идеология разбиения решения задачи управления ОС на два этапа широко используется в теории управления и при решении более сложных задач.

МЕХАНИЗМ СТИМУЛИРОВАНИЯ (ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ)

Пусть множество N возможных действий агента конечно: $N = \{1, 2, ..., n\}$

Предпочтения агента в отсутствие стимулирования описываются вектором $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$.

Управление со стороны центра заключается в выборе системы стимулирования $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, то есть в доплате (стимулировании, которое по знаку может быть как положительным, так и отрицательным) агенту за выбор тех или иных действий.

Целевая «функция» агента $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$:

$$f_i = q_i + \sigma_i,\ i \in N.$$

Целевая функция центра $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$:

$$\Phi_i = H_i - \sigma_i,\ i \in N,$$

Эффективностью системы стимулирования (управления) называется максимальное значение целевой функции центра на множестве действий агента, реализуемых этой системой стимулирования.

Задача стимулирования заключается в назначении центром такой системы стимулирования, при которой агент выбирает наиболее благоприятное для центра действие.

ЗАДАЧА СОГЛАСОВАНИЯ И ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО СОГЛАСОВАННОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Задача согласования:

$P(\sigma) = \{i \in N \mid f_i \geq f_j,\ j \in N\}$,

$P(\sigma) = \{i \in N \mid q_i + \sigma_i \geq q_j + \sigma_j,\ j \in N\}$

оптимальная система стимулирования:

$\sigma^* = arg \max\limits_{\sigma} \max\limits_{i \in P(\sigma)} \{H_i - \sigma_i\}$.

Минимальная система стимулирования, реализующей в рамках гипотезы благожелательности ***все*** действия агента – компенсаторная система стимулирования $\sigma^K = (\sigma_1^K, \sigma_2^K, \ldots, \sigma_n^K)$: определяемая следующим образом:

$$\sigma_j^K = q_k - q_j,\ j \in N$$

где $k = arg \max\limits_{j \in N} q_j$.

Задача оптимального согласованного планирования

Множество оптимальных с точки зрения центра реализуемых действий:

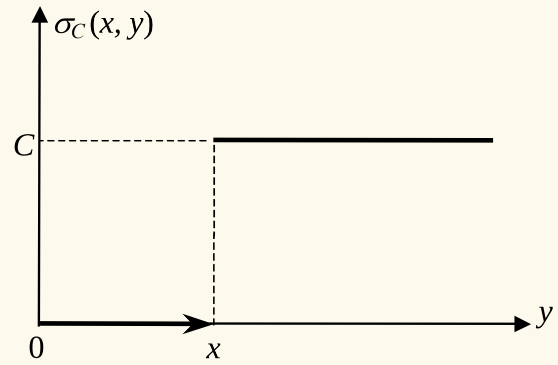
$$P(\Phi, f) = Arg \max_{i \in N} \{H_i - \sigma_i^K\} = Arg \max_{i \in N} \{H_i - q_k + q_i\}$$

3. БАЗОВЫЕ МЕХАНИЗМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ

Скачкообразные системы стимулирования (C-типа)

$$\sigma_C(x, y) = \begin{cases} C, y \geq x \\ 0, y < x \end{cases}. \qquad (1)$$

Параметр $x \in X$ называется *планом* – желательным с точки зрения центра состоянием (действием, результатом деятельности и т. д.) агента.



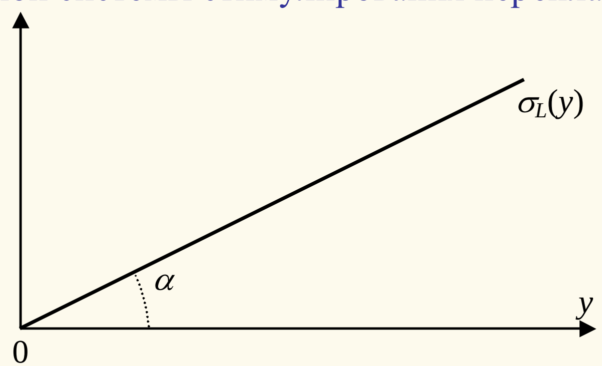
Системы стимулирования C-типа содержательно могут интерпретироваться как *аккордные*, соответствующие фиксированному вознаграждению при заданном результате (например, объеме работ не ниже оговоренного заранее, времени и т. д.). Другая содержательная интерпретация соответствует случаю, когда действием агента является количество отработанных часов, то есть вознаграждение соответствует, например, фиксированному окладу.

ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ (ЛИНЕЙНЫЕ) СИСТЕМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ (L-ТИПА)

Вознаграждение агента прямо пропорционально его действию (количеству отработанных часов, объему выпущенной продукции и т. д.), а ставка оплаты $\alpha \geq 0$ является коэффициентом пропорциональности: $\sigma_L(y) = \alpha\, y$ или $\sigma_L(y) = \sigma_0 + \alpha\, y$.

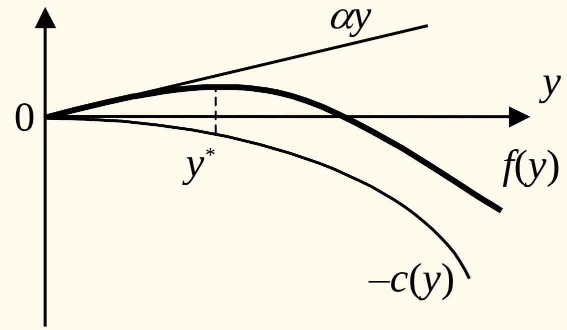
При использовании пропорциональных (линейных) систем стимулирования и непрерывно дифференцируемой монотонной выпуклой функции затрат агента выбираемое им действие определяется следующим выражением: $y^* = c'^{-1}(\alpha)$, где $c'^{-1}(\cdot)$ – функция, обратная производной функции затрат агента. Затраты центра на стимулирование превышают минимально необходимые на: $y^* c'(y^*) - c(y^*)$.

Например, если центр имеет функцию дохода $H(y) = b\, y$, $b > 0$, а функция затрат агента выпукла и равна: $c(y) = a\, y^2$, $a > 0$, то при любом реализуемом действии агента центр при использовании пропорциональной системы стимулирования переплачивает ему ровно в два раза.



Пропорциональная система стимулирования (L-*типа*)

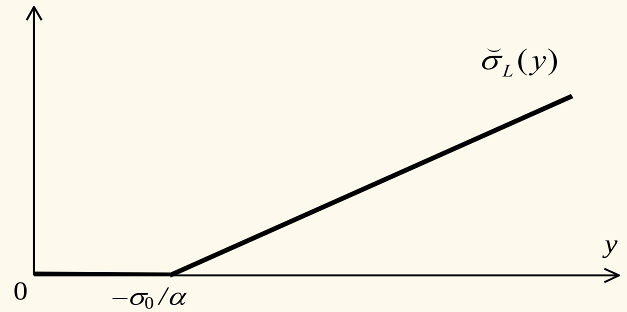
ПРОПОРЦИОНАЛЬНАЯ СИСТЕМА СТИМУЛИРОВАНИЯ (L-ТИПА)



Целевая функция агента при использовании центром системы стимулирования L-типа

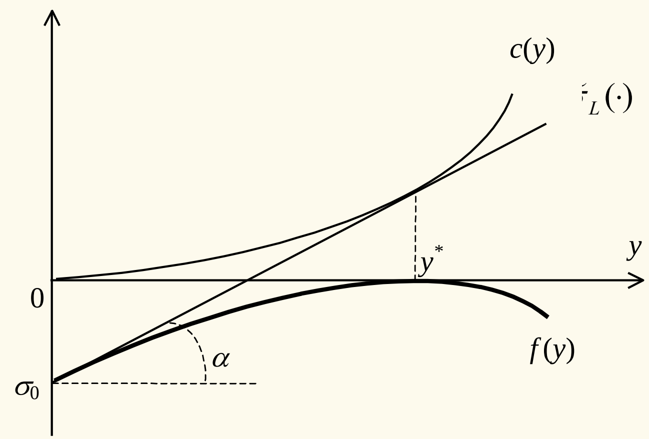
Неэффективность пропорциональных систем стимулирования вида $\sigma_L(y) = \alpha\, y$ обусловлена требованием неотрицательности вознаграждений.

Если допустить, что вознаграждение может быть отрицательным (при этом «отрицательный» участок функции стимулирования может не использоваться): $\breve{\sigma}_L(y) = \sigma_0 + \alpha\, y$, где $\sigma_0 \leq 0$,



Линейная функция стимулирования

Тогда при выпуклых функциях затрат агента эффективность пропорциональной системы стимулирования $\breve{\sigma}_L(\cdot)$ может быть равна эффективности оптимальной (компенсаторной) системы стимулирования: $y^*(\alpha) = c'^{-1}(\alpha)$, $\sigma_0(\alpha) = c\,(c'^{-1}(\alpha)) - \alpha\, c'^{-1}(\alpha)$.



Целевая функция агента при использовании центром системы стимулирования $\breve{\sigma}_L(\cdot)$

Оптимальное значение α^* ставки оплаты при этом выбирается из условия максимума целевой функции центра: $\alpha^* = arg \max\limits_{\alpha \geq 0} [H(y^*(\alpha)) - \breve{\sigma}_L(y^*(\alpha))]$

Системы стимулирования, основанные на перераспределении дохода (*D*-типа)

Вознаграждение агента равно определенной (например, постоянной) доле $\xi \in [0; 1]$ дохода центра:

$$\sigma_D(y) = \xi\, H(y)$$

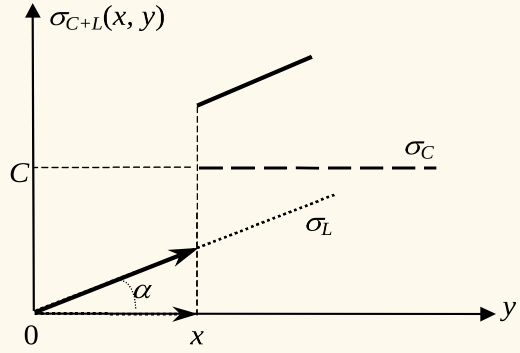
Системы стимулирования *C*, *L* и *D*-типа являются параметрическими: для определения скачкообразной системы стимулирования достаточно задать пару (x, C); для определения пропорциональной системы стимулирования достаточно задать ставку оплаты α; для определения системы стимулирования, основанной на перераспределении дохода, достаточно задать норматив ξ.

Операции коснтруирования систем стимулирования на основе базовых:

Первый тип операции – переход к соответствующей *«квази»-системе стимулирования*

Второй тип операции – разбиение множества возможных действий на несколько подмножеств и использование различных базовых систем стимулирования на различных подмножествах. Получающиеся в результате применения операции второго типа системы стимулирования называют *составными*.

Третий тип операции – алгебраическое суммирование двух систем стимулирования (что допустимо, так как стимулирование входит в целевые функции участников системы аддитивно). Результат применения операции третьего типа называют *суммарной системой стимулирования*.



Система стимулирования C+L-типа (*суммарная*)

СРАВНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ БАЗОВЫХ СИСТЕМ СТИМУЛИРОВАНИЯ

	K	C	L	LK	D	L+C	LL
K	=	=	≥	=	≥	=	=
C	=	=	≥	=	≥	=	=
L	≤	≤	=	≤	?	≤	≤
	=	=	≥	=	≥	=	=
D	≤	≤	?	≤	=	≤	≤
L+C	=	=	≥	=	≥	=	=
LL	=	=	≥	=	≥	=	=

К-типа - квазикомпенсаторная система стимулирования

4. ЗАДАЧА СТИМУЛИРОВАНИЯ КОЛЛЕКТИВА АГЕНТОВ

МЕХАНИЗМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ ЗА ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАТРАТЫ

Простейшим обобщением базовой одноэлементной модели является *многоэлементная ОС* с независимыми (невзаимодействующими) агентами. В этом случае задача стимулирования распадается на набор одноэлементных задач.

Если ввести общие для всех или ряда агентов ограничения на механизм стимулирования, то получается задача стимулирования в ОС со слабо связанными агентами (см. ниже), представляющая собой набор параметрических одноэлементных задач, для которого проблема поиска оптимальных значений параметров решается стандартными методами условной оптимизации.

Если агенты взаимосвязаны, то есть затраты или/и стимулирование агента зависят, помимо его собственных действий, от действий других агентов, то получается «полноценная» многоэлементная модель стимулирования, описываемая ниже.

Стимулирование в ОС со слабо связанными агентами.

Результаты решения задачи стимулирования для одного агента могут быть непосредственно обобщены на случай, когда имеются $n \geq 2$ агентов, функции затрат которых зависят только от их собственных действий (так называемые *сепарабельные затраты*), стимулирование каждого агента зависит только от его собственных действий, но существуют ограничения на суммарное стимулирование агентов. Такая модель называется *ОС со слабо связанными агентами* и является промежуточной между системами индивидуального и коллективного стимулирования.

$N = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множество агентов,

$y_i \in A_i$ – действие i-го агента,

$c_i(y_i)$ – затраты i-го агента,

$\sigma_i(y_i)$ – стимулирование его со стороны центра, $i \in N$,

$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ – вектор действий агентов, $y \in A' = \prod_{i \in N} A_i$.

БЮДЖЕТНОЕ ОГРАНИЧЕНИЕ

Центр получает доход $H(y)$ от деятельности агентов.

Размеры индивидуальных вознаграждений агентов ограничены величинами $\{C_i\}_{i \in N}$:

$$\forall\, y_i \in A_i \;\; \sigma_i(y_i) \le C_i,\; i \in N.$$

Если фонд заработной платы (ФЗП) ограничен величиной R:

$$\sum_{i \in N} C_i \le R,$$

максимальное множество реализуемых действий для i-го агента зависит от соответствующего ограничения механизма стимулирования :

$$P_i(C_i) = [0,\, y_i^+(C_i)],\; i \in N.$$

Оптимальное решение задачи стимулирования в ОС со слабо связанными:

Максимизировать выбором индивидуальных ограничений $\{C_i\}_{i \in N}$, удовлетворяющих *бюджетному ограничению* $\sum_{i \in N} C_i \le R$, следующее выражение:

$$\Phi(R) = \max_{\{y_i \in P_i(C_i)\}_{i \in N}} H(y_1, \ldots, y_n),$$

что является стандартной задачей условной оптимизации.

Когда ФЗП фиксирован, затраты центра на стимулирование не вычитаются из его дохода. Если ФЗП является переменной величиной, то его оптимальное значение R^* может быть найдено как решение следующей задачи:

$$R^* = \arg \max_{R \ge 0} \, [\Phi(R) - R].$$

Пример 1. Пусть функции затрат агентов – $c_i(y_i) = y_i^2/2r_i$, $i \in N$, а функция дохода центра – $H(y) = \sum_{i \in N} \alpha_i y_i$, где $\{\alpha_i\}_{i \in N}$ – положительные константы.

При заданных ограничениях $\{C_i\}_{i \in N}$ максимальное реализуемое действие каждого агента:

$$y_i^+(C_i) = \sqrt{2 r_i C_i}\,,\ i \in N.$$

Задача свелась к определению оптимального набора ограничений $\{C_i^*\}_{i \in N}$, удовлетворяющего бюджетному ограничению и максимизирующего целевую функцию центра:

$$\begin{cases} \sum_{i \in N} \alpha_i \sqrt{2 r_i C_i} \to \max\limits_{\{C_i \geq 0\}_{i \in N}} \\ \sum_{i \in N} C_i \leq R \end{cases}.$$

Решение этой задачи имеет вид:

$$C_i^* = \frac{r_i \alpha_i^2}{\sum_{j \in N} r_j \alpha_j^2} R\,,\ i \in I\,.$$

Оптимальный размер ФЗП равен: $R^* = \sum_{i \in N} r_i \alpha_i^2 / 2$.

$y_{-i} = (y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n) \in A_{-i} = \prod_{j \neq i} A_j$ – обстановка игры для i-го агента.

Целевая функция центра:

$$\Phi(\sigma, y) = H(y) - \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(y),$$

Целевая функция i-го агента $f_i(\sigma_i, y)$:

$$f_i(\sigma_i, y) = \sigma_i(y) - c_i(y), \; i \in N.$$

Отметим, что и индивидуальное вознаграждение, и индивидуальные затраты i-го агента по выбору действия y_i в общем случае зависят от действий всех агентов (*случай сильно связанных агентов* с *несепарабельными затратами*).

Примем следующий порядок функционирования ОС. Центру и агентам на момент принятия решения о выбираемых стратегиях (соответственно функциях стимулирования и действиях) известны целевые функции и допустимые множества всех участников ОС. Центр, обладая правом первого хода, выбирает функции стимулирования и сообщает их агентам, после чего агенты при известных функциях стимулирования одновременно и независимо выбирают действия, максимизирующие их целевые функции.

Предположения относительно параметров ОС:

1) множество допустимых действий каждого агента совпадает с множеством неотрицательных действительных чисел;

2) функции затрат агентов непрерывны, неотрицательны и $\forall\, y_i \in A_i\ c_i(y)$ не убывает по y_i, $i \in N$; $\forall\, y_{-i} \in A_{-i}\ c_i(0, y_{-i}) = 0$;

3) функция дохода центра непрерывна по всем переменным и достигает максимума при ненулевых действиях агентов.

$P(\sigma)$ – множество равновесных при системе стимулирования σ стратегий агентов – множество решений игры (тип равновесия пока не оговаривается; единственно предположим, что агенты выбирают свои стратегии одновременно и независимо друг от друга, не имея возможности обмениваться дополнительной информацией и полезностью).

Как и в одноэлементной ОС, гарантированной эффективностью (далее просто «эффективностью») стимулирования является минимальное (или максимальное – в рамках гипотезы благожелательности) значение целевой функции центра на соответствующем множестве решений игры:

$$K(\sigma) = \min_{y \in P(\sigma)} \Phi(\sigma, y).$$

Задача синтеза оптимальной функции стимулирования заключается в поиске допустимой системы стимулирования σ^*, имеющей максимальную эффективность:

$$\sigma^* = \arg\max_{\sigma \in M} K(\sigma).$$

В частном случае, когда агенты независимы (вознаграждение и затраты каждого из них зависят только от его собственных действий), оптимальной (точнее – δ-оптимальной, где $\delta = \sum_{i \in N} \delta_i$) является компенсаторная система стимулирования:

$$\sigma_{iK}(y_i) = \begin{cases} c_i(y_i^*) + \delta_i, & y_i = y_i^* \\ 0, & y_i \neq y_i^* \end{cases}, \; i \in N,$$

где $\{\delta_i\}_{i \in N}$ – сколь угодно малые строго положительные константы (мотивирующие надбавки), а оптимальное действие y^*, реализуемое системой стимулирования (5) как равновесие в доминантных стратегиях (РДС), является решением следующей задачи оптимального согласованного планирования:

$$y^* = arg \max_{y \in A'} \{H(y) - \sum_{i \in N} c_i(y_i)\}.$$

Если стимулирование каждого агента зависит от действий всех агентов и *затраты несепарабельны* (то есть затраты каждого агента зависят в общем случае от действий всех агентов, что отражает взаимосвязь и взаимозависимость агентов), то множества *равновесий Нэша* $E_N(\sigma) \subseteq A'$ и РДС $y_d \in A'$ имеют вид:

$$E_N(\sigma) = \{y^N \in A \mid \forall\, i \in N \; \forall\, y_i \in A_i \; \sigma_i(y^N) - c_i(y^N) \geq \sigma_i(y_i, y_{-i}^N) - c_i(y_i, y_{-i}^N)\};$$

$y_{i_d} \in A_i$ – доминантная стратегия i-го агента, тогда и только тогда, когда

$$\forall\, y_i \in A_i, \forall\, y_{-i} \in A_{-i} \; \sigma_i(y_{i_d}, y_{-i}) - c_i(y_{i_d}, y_{-i}) \geq \sigma_i(y_i, y_{-i}) - c_i(y_i, y_{-i}).$$

Если при заданной системе стимулирования у всех агентов имеется доминантная стратегия, то говорят, что данная система стимулирования реализует соответствующий вектор действий как РДС.

ПРИНЦИП ДЕКОМПОЗИЦИЙ

Институт Проблем Управления РАН

Фиксируем произвольный вектор действий агентов $y^* \in A'$ и рассмотрим следующую систему стимулирования: $\sigma_i(y^*, y) = \begin{cases} c_i(y_i^*, y_{-i}) + \delta_i, & y_i = y_i^* \\ 0, & y_i \neq y_i^* \end{cases}$, $\delta_i \geq 0$, $i \in N$.

Доказано, что при использовании центром данной системы стимулирования y^* – РДС. Более того, если $\delta_i > 0$, $i \in N$, то y^* – единственное РДС.

Содержательно при использовании данной системы стимулирования центр использует следующий **принцип декомпозиции**: Он предлагает i-му агенту: «выбирай действие y_i^*, а я компенсирую тебе затраты независимо от того, какие действия выбрали остальные агенты, если же ты выберешь любое другое действие, то вознаграждение будет равно нулю».

Стимулирование каждого агента должно зависеть только от его собственного действия, то, фиксировав для каждого агента обстановку игры, перейдем к системе индивидуального стимулирования:

фиксируем произвольный вектор действий агентов $y^* \in A'$ и определим систему стимулирования:

$$\sigma_i(y^*, y_i) = \begin{cases} c_i(y_i^*, y_{-i}^*) + \delta_i, & y_i = y_i^* \\ 0, & y_i \neq y_i^* \end{cases}, \quad \delta_i \geq 0,\ i \in N.$$

Содержательно: при использовании системы стимулирования центр предлагает i-му агенту: «выбирай действие y_i^*, а я компенсирую тебе затраты, считая, что остальные агенты также выбрали соответствующие компоненты – y_{-i}^*, если же ты выберешь любое другое действие, то вознаграждение будет равно нулю». Используя такую стратегию, центр также декомпозирует игру агентов, то есть реализует вектор y^* как равновесие Нэша игры агентов.

Вектор оптимальных реализуемых действий агентов y^*, фигурирующий в качестве параметра в приведенных системах стимулирования, определяется в результате решения следующей задачи оптимального согласованного планирования:

$$y^* = arg \max_{t \in A'} \{H(t) - \upsilon(t)\},$$

где $v(t) = \sum_{i \in N} c_i(t)$

эффективность системы стимулирования

$$K^* = H(y^*) - \sum_{i \in N} c_i(y^*) - \delta.$$

Доказано, что построенная система стимулирования является оптимальной, то есть обладает максимальной эффективностью, среди всех систем стимулирования в многоэлементных ОС.

Пример. Решим задачу стимулирования в ОС с двумя агентами, имеющими функции затрат: $c_i(y) = \frac{(y_i + \alpha\, y_{3-i})^2}{2r_i}$, i = 1, 2, где α – параметр, отражающий степень взаимозависимости агентов. Пусть функция дохода центра $H(y) = y_1 + y_2$, а фонд заработной платы ограничен величиной R.

Задача стимулирования сводится к поиску оптимальных реализуемых действий:

$$\begin{cases} H(y) \to \max\limits_{y \geq 0} \\ c_1(y) + c_2(y) \leq R \end{cases}.$$

Применяя метод множителей Лагранжа, получаем, что решение имеет вид:

$$y_1^* = \sqrt{\frac{2R}{r_1 + r_2}}\ \frac{\alpha\, r_2 - r_1}{\alpha^2 - 1},$$

$$y_2^* = \sqrt{\frac{2R}{r_1 + r_2}}\ \frac{\alpha\, r_1 - r_2}{\alpha^2 - 1}.$$

Подставляя равновесные действия агентов в целевую функцию центра, получаем, что оптимальный размер ФЗП равен:

$$R^* = arg \max_{R \geq 0}\ [\sqrt{2R(r_1 + r_2)}\,/(1 - \alpha) - R] = \frac{r_1 + r_2}{2(\alpha + 1)^2}.$$

Пример: *модель совместного производства.*

Рассмотрим многоэлементную двухуровневую ОС, состоящую из центра и n агентов.

Пусть целевая функция i-го агента:

$$f_i(y, r_i) = h_i(y) - c_i(y, r_i),\ i \in N.$$

где r_i – параметр эффективности (тип) агента

Выберем следующий вид функций дохода и затрат:

$$h_i(y) = \lambda_i\,\theta\,Y,\ i \in N,\ c_i(y, r_i) = \frac{y_i^2}{2(r_i \pm \beta_i \sum_{j \neq i} y_j)},\ i \in N,$$

где $Y = \sum_{i \in N} y_i$, $\sum_{i \in N} \lambda_i = 1$.

Для случая, когда в знаменателе стоит знак «–», предполагается, что $\sum_{j \neq i} y_j < \frac{r_i}{\beta_i}$.

Содержательно набор агентов может интерпретироваться как фирма, подразделения которой (агенты) производят однородную продукцию, реализуемую на рынке по цене θ. Суммарный доход θY распределяется между агентами в соответствии с фиксированными долями $\{\lambda_i\}_{i \in N}$. Затраты агента возрастают по его действиям, а эффективность деятельности определяется типом агента r_i.

Взаимодействие агентов моделируется зависимостью затрат (эффективности деятельности) каждого из них от действий всех (других) агентов.

ПРИМЕР

Знак «+» в знаменателе соответствует эффективному взаимодействию агентов (убыванию затрат на масштаб) – чем большие действия выбирают другие агенты, тем меньше затраты (выше эффективность деятельности) рассматриваемого агента, что на практике может соответствовать снижению удельных постоянных издержек, обмену опытом, технологиями и т. д.

Знак «–» в знаменателе соответствует неэффективному взаимодействию агентов (возрастанию затрат на масштаб) Коэффициенты $\{\beta_i \geq 0\}_{i \in N}$ отражают степень взаимозависимости агентов.

Пусть рыночная цена θ известна всем участникам ОС. Тогда, дифференцируя целевые функции агентов, приравнивая производные нулю и складывая получившиеся при этом выражения

$$y_i = \lambda_i\, \theta\, (r_i \pm \beta_i \sum_{j \neq i} y_j\,),\ i \in N,$$

получим следующую зависимость суммарных действий Y^+ от параметра θ:

$$Y^+(\theta) = \frac{\sum_{i \in N} \frac{\lambda_i\, \theta\, r_i}{1 \pm \lambda_i \theta \beta_i}}{1 \mp \sum_{i \in N} \frac{\lambda_i\, \theta\, \beta_i}{1 \pm \lambda_i \theta \beta_i}}.$$

Стимулированию соответствует изменение параметров $\{\lambda_i\}_{i \in N}$, которые могут интерпретироваться как внутренние (внутрифирменные, трансфертные и т. д.) цены.

Пример. Третьим примером является *аккордная система оплаты труда*. Рассмотрим ОС с двумя агентами, имеющими функции затрат $c_i(y_i) = y_i^2 / 2r_i$, где r_i – тип i-го агента, $y_i \in A_i = \Re_1^+$, $i = 1, 2$. Целевая функция i-го агента:

$$f_i(y) = \sigma_i(y) - c_i(y_i),\ i = 1, 2.$$

Пусть центр использует систему стимулирования

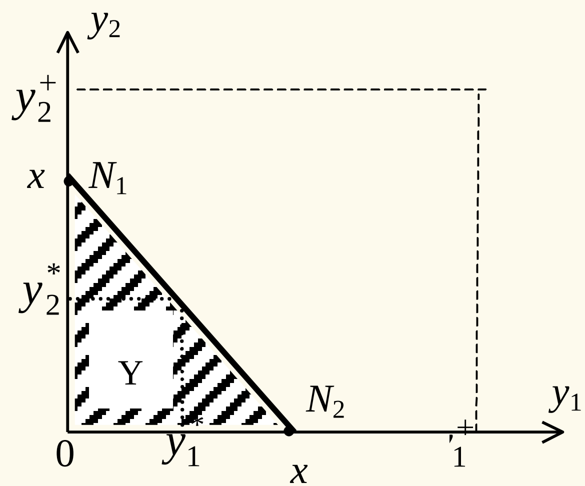
$$\sigma_i(y_1, y_2) = \begin{cases} C_i, & y_1 + y_2 \geq x \\ 0, & y_1 + y_2 < x \end{cases},\ i = 1, 2.$$

Содержательно центр выплачивает каждому агенту фиксированное вознаграждение при условии, что сумма их действий оказывается не меньше, чем некоторое плановое значение $x > 0$.

$y_i^+ = \sqrt{2r_iC_i}$, $i = 1, 2$, $Y = \{(y_1, y_2) \mid y_i \leq y_i^+,\ i = 1, 2,\ y_1 + y_2 \leq x\}$ – множество индивидуально-рациональных действий агентов.

ЧЕТЫРЕ ВОЗМОЖНЫЕ КОМБИНАЦИИ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим четыре возможных комбинации переменных.



В первом случае множество равновесий Нэша составляет отрезок: $E_N(\sigma) = [N_1; N_2]$. Фиксируем произвольное равновесие $y^* = (y_1^*,\ y_2^*) \in E_N(\sigma)$. Наличие «большого» равновесия Нэша (отрезка, содержащего континуум точек) имеет несколько минусов с точки зрения эффективности стимулирования. Поясним это утверждение.

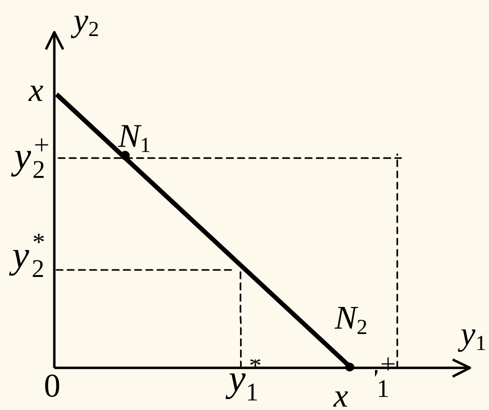
Так как все точки отрезка $[N_1; N_2]$ эффективны по Парето с точки зрения агентов, то целесообразно доплачивать агентам за выбор конкретных действий из этого отрезка малую, но строго положительную величину.

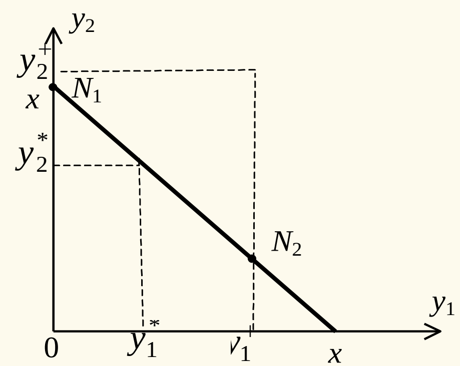
Построим систему индивидуального стимулирования:

$$\tilde{\sigma}_1^*(y_1) = \sigma_1(y_1,\ y_2^*) = \begin{cases} C_1, & y_1 \ge y_1^* \\ 0, & y_1 < y_1^* \end{cases}, \qquad \tilde{\sigma}_2^*(y_2) = \sigma_2(y_1^*,\ y_2) = \begin{cases} C_2, & y_2 \ge y_2^* \\ 0, & y_2 < y_2^* \end{cases}.$$

При использовании этой системы стимулирования точка $y^* = (y_1^*,\ y_2^*)$ оказывается единственным равновесием Нэша, то есть, переходя от системы стимулирования каждого агента, зависящей от действий всех агентов, к системе стимулирования, зависящей только от действий данного агента, центр декомпозирует игру агентов, реализуя при этом единственное действие.

При этом эффективность стимулирования, очевидно, не только не понижается, а может оказаться более высокой, чем при использовании исходной системы стимулирования.



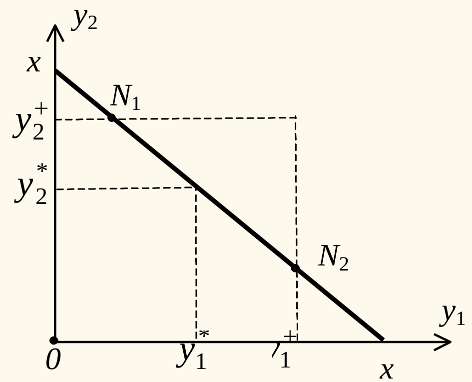


Во втором и третьем случаях равновесием Нэша являются отрезки $[N_1; N_2]$.

И, наконец, в четвертом случае множество равновесий Нэша состоит из точки (0; 0) и отрезка $[N_1; N_2]$, то есть

$$E_N(\sigma) = (0; 0) \cup [N_1; N_2],$$

причем точки интервала $(N_1; N_2)$ недоминируемы по Парето другими равновесиями.



Пусть теперь в условиях рассматриваемого примера функции затрат агентов несепарабельны и имеют вид:

$$c_i(y) = \frac{(y_i + \alpha\, y_{3-i})^2}{2r_i}.$$

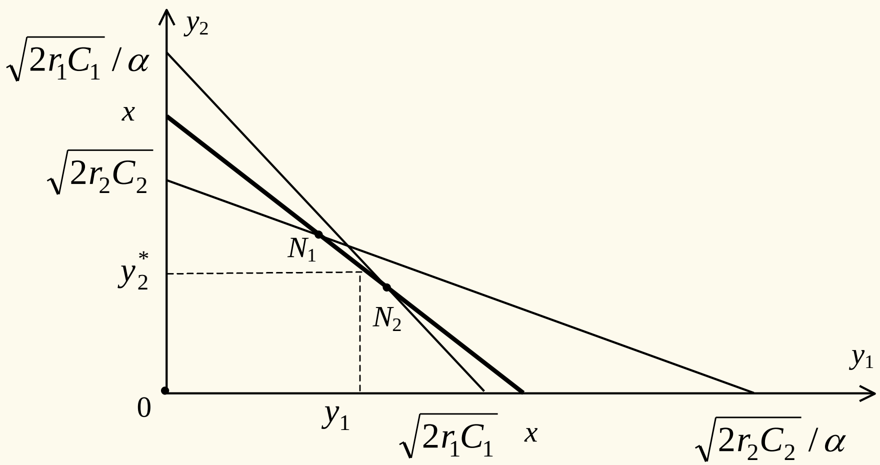
ОПРЕДЕЛЕНИЕ МНОЖЕСТВА ИНДИВИДУАЛЬНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ДЕЙСТВИЙ АГЕНТОВ

Институт Проблем Управления РАН

Определим множество Y индивидуально-рациональных действий агентов:

$$Y = \{(y_1, y_2) \mid c_i(y) \le C_i,\ i = 1, 2\}.$$

Для того чтобы не рассматривать все возможные комбинации значений параметров $\{r_1, r_2, C_1, C_2, x\}$, возьмем случай, приведенный на следующем рисунке



В рассматриваемом случае множество равновесий Нэша включает отрезок $[N_1; N_2]$. Система стимулирования

$$\tilde{\sigma}_1^*(y) = \begin{cases} c_1(y_1^*, y_2), & y_1 = y_1^* \\ 0, & y_1 \ne y_1^* \end{cases}$$

$$\tilde{\sigma}_2^*(y) = \begin{cases} c_2(y_1, y_2^*), & y_2 = y_2^* \\ 0, & y_2 \ne y_2^* \end{cases}$$

реализует действие $y^* \in [N_1; N_2]$ как равновесие в доминантных стратегиях.

Рассмотрим формулировку и решение задачи коллективного стимулирования в многоэлементной детерминированной ОС, в которой центр имеет агрегированную информацию о результатах деятельности агентов.

Результат деятельности $z \in A_0 = Q(A')$ ОС, состоящей из n агентов, является функцией (называемой *функцией агрегирования*) их действий: $z = Q(y)$.

Целевая функция центра представляет собой разность между его доходом $H(z)$ и суммарным вознаграждением $\upsilon(z)$, выплачиваемым агентам: $\upsilon(z) = \sum_{i \in N} \sigma_i(z)$, где $\sigma_i(z)$ – стимулирование i-го агента, $\sigma(z) = (\sigma_1(z), \sigma_2(z), \ldots, \sigma_n(z))$:

$$\Phi(\sigma(\cdot), z) = H(z) - \sum_{i \in N} \sigma_i(z).$$

Целевая функция i-го агента:

$$f_i(\sigma_i(\cdot), y) = \sigma_i(z) - c_i(y),\ i \in N.$$

эффективностью стимулирования является минимальное (или максимальное – в рамках гипотезы благожелательности) значение целевой функции центра на соответствующем множестве решений игры:

$$K(\sigma(\cdot)) = \min_{y \in P(\sigma(\cdot))} \Phi(\sigma(\cdot), Q(y)).$$

Задача синтеза оптимальной функции стимулирования заключается в поиске допустимой системы стимулирования σ^*, имеющей максимальную эффективность:

$$\sigma^* = \arg\max_{\sigma(\cdot)} K(\sigma(\cdot)).$$

МИНИМАЛЬНЫЕ СУММАРНЫЕ ЗАТРАТЫ АГЕНТОВ

Множество векторов действий агентов, приводящих к заданному результату деятельности ОС:

$$Y(z) = \{y \in A' \mid Q(y) = z\} \subseteq A',\ z \in A_0.$$

Выше показано, что в случае наблюдаемых действий агентов минимальные затраты центра на стимулирование по реализации вектора действий $y \in A'$ равны суммарным затратам агентов $\sum_{i \in N} c_i(y)$.

Вычислим минимальные суммарные затраты агентов по достижению результата деятельности $z \in A_0$

$$\tilde{\vartheta}(z) = \min_{y \in Y(z)} \sum_{i \in N} c_i(y),$$

а также множество действий

$$Y^*(z) = Arg \min_{y \in Y(z)} \sum_{i \in N} c_i(y),$$

на котором этот минимум достигается.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ «ТЕХНИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА»

Фиксируем произвольный результат деятельности $x \in A_0$ и произвольный вектор $y^*(x) \in Y^*(x) \subseteq Y(x)$.

При дополнительном предположении «технического» характера:

$\forall\ x \in A_0, \forall\ y' \in Y(x), \forall\ i \in N, \forall\ y_i \in Proj_i\ Y(x)\ \ c_j\,(y_i, y'_{-i})$ не убывает по y_i, $j \in N$

доказано, что:

1) при использовании центром системы стимулирования

$$\sigma^*_{ix}(z) = \begin{cases} c_i(y^*(x)) + \delta_i, & z = x \\ 0, & z \neq x \end{cases},\ i \in N,$$

вектор действий агентов $y^*(x)$ реализуется как единственное равновесие с минимальными затратами центра на стимулирование, равными:

$$\tilde{\vartheta}(x) + \delta, \text{ где } \delta = \sum_{i \in N} \delta_i\ ;$$

2) система стимулирования является δ-опти-мальной.

На втором шаге решения задачи стимулирования найдем наиболее выгодный для центра результат деятельности ОС $x^* \in A_0$ как решение задачи оптимального согласованного планирования:

$$x^* = arg \max_{x \in A_0} [H(x) - \tilde{\vartheta}(x)]$$

Таким образом, получено решение задачи синтеза оптимальной системы стимулирования результатов совместной деятельности.

Исследуем, как незнание (невозможность наблюдения) центром индивидуальных действий агентов влияет на эффективность стимулирования.

При наблюдаемых действиях агентов затраты центра на стимулирование $\vartheta_1(y)$ по реализации вектора $y \in A'$ действий агентов:

$$\vartheta_1(y) = \sum_{i \in N} c_i(y),$$

а эффективность стимулирования K_1 равна:

$$K_1 = \max_{y \in A'} \{H(Q(y)) - \vartheta_1(y)\}$$

При ненаблюдаемых действиях агентов минимальные затраты центра на стимулирование $\vartheta_2(z)$ по реализации результата деятельности $z \in A_0$ определяются следующим образом

$$\vartheta_2(z) = \min_{y \in Y(z)} \sum_{i \in N} c_i(y),$$

а эффективность стимулирования K_2 равна:

$$K_2 = \max_{z \in A_0} \{H(z) - \vartheta_2(z)\}.$$

Доказано, что эффективности K_1 и K_2 равны. Данный факт, который условно можно назвать «теоремой об идеальном агрегировании в моделях стимулирования».

Наличие агрегирования информации не снижает эффективности функционирования системы.

ИДЕАЛЬНОЕ АГРЕГИРОВАНИЕ

В рассматриваемой модели присутствует *идеальное агрегирование*, возможность осуществления которого содержательно обусловлена тем, что центру не важно, какие действия выбирают агенты, лишь бы эти действия приводили с минимальными суммарными затратами к заданному результату деятельности. При этом уменьшается информационная нагрузка на центр, а эффективность стимулирования остается такой же.

Итак, качественный вывод из проведенного анализа следующий: если доход центра зависит от агрегированных показателей деятельности агентов, то целесообразно основывать стимулирование агентов на этих агрегированных показателях. Даже если индивидуальные действия агентов наблюдаются центром, то использование системы стимулирования, основывающейся на действиях агентов, не приведет к увеличению эффективности управления, а лишь увеличит информационную нагрузку на центр.

Принцип компенсации затрат на модели с агрегированием информации обобщается следующим образом: минимальные затраты центра на стимулирование по реализации заданного результата деятельности ОС определяются как минимум компенсируемых центром суммарных затрат агентов, при условии, что последние выбирают вектор действий, приводящий к заданному результату деятельности.

Пример

$$z = \sum_{i \in N} y_i\ ,\ H(z) = z,\ c_i\,(y_i) = \ y_i^2\,/\,2r_i,\ i \in N$$

Вычисляем $Y(z) = \{y \in A' \mid \sum_{i \in N} y_i \ = z\}$.

Решение задачи $\sum_{i \in N} c_i(y_i) \to \min_{y \in A'}$ при условии $\sum_{i \in N} y_i \ = x$

имеет вид: $y_i^*(x) = \frac{r_i}{W}\ x$, где $W = \sum_{i \in N} r_i\ ,\ i \in N$.

Минимальные затраты на стимулирование по реализации результата деятельности $x \in A_0$ равны: $\vartheta(x) = x^2 / 2\,W$.

Вычисляя максимум целевой функции центра $\max_{x \ge 0}\ [H(x) - \vartheta(x)]$, находим оптимальный план: $x^* = W$ и оптимальную систему стимулирования:

$$\sigma_i^*(W, z) = \begin{cases} r_i\,\frac{x^2}{2W^2}, & z = x \\ 0, & z \neq x \end{cases},\ i \in N.$$

При этом эффективность стимулирования (значение целевой функции центра) равна: $K = W/2$.

До сих пор рассматривались *персонифицированные* системы индивидуального и коллективного стимулирования, в которых центр устанавливал для каждого агента свою зависимость вознаграждения от его действий или действий других агентов или результатов их совместной деятельности. Кроме персонифицированных, существуют *унифицированные* системы стимулирования, в которых зависимость вознаграждения от тех или иных параметров одинакова для всех агентов.

Унифицированные пропорциональные системы стимулирования. Введем следующее предположение относительно функций затрат агентов: $c_i(y_i, r_i) = r_i\, \varphi(y_i / r_i)$, $i \in N$, где $\varphi(\cdot)$ – гладкая монотонно возрастающая выпуклая функция, $\varphi(0) = 0$, (например, для функций типа Кобба-Дугласа $\varphi(t) = t^{\alpha} / \alpha$, $\alpha \geq 1$), $r_i > 0$ – параметр эффективности агента.

Если центр использует пропорциональные (L-типа) индивидуальные системы стимулирования: $\sigma_i(y_i) = \lambda_i y_i$, то целевая функция агента имеет вид: $f_i(y_i) = \lambda_i y_i - c_i(y_i)$. Дифференцируя целевую функцию, вычислим действие, выбираемое агентом при использовании центром некоторой фиксированной системы стимулирования: $y_i^*(\gamma_i) = r_i\, \varphi'^{-1}(\lambda_i)$, $i \in N$, где $\varphi'^{-1}(\cdot)$ – функция, обратная производной функции $\varphi(\cdot)$.

Минимальные суммарные затраты центра на стимулирование равны: $\vartheta_L(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, r_i\, \varphi'^{-1}(\lambda_i)$,

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$. Суммарные затраты агентов равны: $c(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} r_i\, \varphi(\varphi'^{-1}(\lambda_i))$.

Задача 1. Пусть центр заинтересован в выполнении агентами плана w по суммарному выпуску с минимальными суммарными затратами агентов (еще раз подчеркнем необходимость различения суммарных затрат агентов и суммарных затрат центра на стимулирование). Тогда его цель заключается в выборе ставок оплаты $\{\lambda_i\}_{i \in N}$ в результате решения следующей задачи:

$$\begin{cases} c(\lambda) \to \min\limits_{\lambda} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^*(\lambda_i) = w \end{cases},$$

решение которой имеет вид: $\lambda_i^* = \varphi'(w / W)$; $y_i^* = r_i\,(w / W)$; $i \in N$, $c^* = W\,\varphi\,(w / W)$; $\vartheta_L^* = R\,\varphi'(w / W)$,

где $W = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i$.

Так как оптимальные ставки оплаты одинаковы для всех агентов, то оптимальна именно унифицированная система стимулирования.

Задача 2. Содержательно двойственной к задаче 1 является задача максимизации суммарного выпуска при ограничении на суммарные затраты агентов:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i^*(\lambda_i) \to \max_{\lambda} \\ c(\lambda) \le v \end{cases}.$$

Решение задачи имеет вид: $\lambda_i^* = \varphi'(\varphi^{-1}(v / W))$; $y_i^* = r_i\, \varphi^{-1}(v / W)$; $i \in N$, $c^* = R$;

$\vartheta_L^* = \varphi^{-1}(v / W)\, W\, \varphi'(\varphi^{-1}(v / W))$, то есть в «двойственной» задаче (естественно) оптимальным решением также является использование унифицированных пропорциональных систем стимулирования.

Замена в задачах 1 и 2 суммарных затрат агентов на суммарные затраты на стимулирование порождает еще одну пару содержательно двойственных задач.

Задача 3. Если центр заинтересован в выполнении агентами плана w по суммарному выпуску с минимальными суммарными затратами на стимулирование, то ставки оплаты определяются в результате решения следующей задачи: $\begin{cases} \vartheta_L(\lambda) \to \min\limits_{\lambda} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^*(\lambda_i) = w \end{cases}$, решение которой совпадает с решением первой задачи, что представляется достаточно интересным фактом, так как суммарные затраты агентов отражают интересы управляемых субъектов, а суммарные затраты на стимулирование – интересы управляющего органа. Естественно, отмеченное совпадение является следствием сделанных предположений.

ЗАДАЧА 4

Задача 4 заключается в максимизации суммарного выпуска при ограничении на суммарные затраты на стимулирование: $\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i^*(\lambda_i) \to \max\limits_{\lambda} \\ \vartheta_L(\lambda) \le v \end{cases}$.

Применяя метод множителей Лагранжа, получаем условие оптимальности (λ_0 – множитель Лагранжа):

$$\lambda_0 \, \varphi'^{-1}(\lambda_i) \, \varphi''(\lambda_i) + \lambda_i = 1, \; i \in N,$$

из которого следует, что все ставки оплаты должны быть одинаковы и удовлетворять уравнению

$$\lambda \, \varphi'^{-1}(\lambda) = v \, / \, W.$$

Таким образом, мы доказали следующий результат: в организационных системах со слабо связанными агентами, имеющими функции затрат типа Кобба-Дугласа, унифицированные системы стимулирования оптимальны на множестве пропорциональных систем стимулирования.

МЕХАНИЗМЫ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ МОТИВАЦИИ

Если в механизмах, рассматриваемых выше, стимулирование заключалось в непосредственном вознаграждении агентов со стороны центра, то в настоящем разделе описаны *механизмы экономической мотивации*, в которых центр управляет агентами путем установления тех или иных нормативов – ставок налога с дохода, прибыли и т.д.

Рассмотрим следующую модель. Пусть в организационной системе (корпорации, фирме) помимо одного центра имеются n агентов, и известны затраты $c_i(y_i)$ i-го агента, зависящие от его действия $y_i \in \Re^1_+$ (например, от объема выпускаемой агентом продукции), $i \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множеству агентов. Будем считать функцию затрат непрерывной, возрастающей, выпуклой и равной нулю при выборе агентом нулевого действия. Целевая функция i-го агента представляет собой разность между его доходом $H_i(y_i)$ и затратами $c_i(y_i)$:

$$f_i(y_i) = H_i(y_i) - c_i(y_i),\ i \in N.$$

Пусть функции затрат агентов имеют вид:

$$c_i(y_i) = r_i\, \varphi(y_i / r_i),\ i \in N,$$

где $\varphi(\cdot)$ – возрастающая гладкая выпуклая функция, такая, что $\varphi(0) = 0$.

Обозначим $\xi(\cdot) = \varphi'^{-1}(\cdot)$ – функцию, обратную производной функции $\varphi(\cdot)$.

Рассмотрим пять механизмов экономической мотивации агентов, а именно:

1) механизм отчислений (налога с дохода);
2) централизованный механизм;
3) механизм с нормативом рентабельности;
4) механизм налога на прибыль;
5) механизм участия в прибыли.

Механизм отчислений. Пусть задана внутрифирменная (трансфертная) цена λ единицы продукции, производимой агентами, и центр использует *норматив* $\gamma \in [0; 1]$ *отчислений* от дохода агентов. Тогда доход агента $H_i(y_i) = \lambda\, y_i$ и целевая функция i-го агента с учетом отчислений центру имеет вид: $f_i(y_i) = (1 - \gamma)\, \lambda\, y_i - c_i(y_i)$, $i \in N$.

Величина γ – норматив отчислений – может интерпретироваться как ставка налога на доход (выручку). Каждый агент выберет действие, максимизирующее его целевую функцию:

$$y_i(\gamma) = r_i\, \xi((1 - \gamma)\, \lambda),\ i \in N.$$

Целевая функция центра, равная сумме отчислений агентов, будет иметь вид:

$$\Phi(\gamma) = \gamma\, \lambda\, W\, \xi((1 - \gamma)\, \lambda),\ \text{где } W = \sum_{i \in N} r_i\, .$$

Задача центра, стремящегося максимизировать свою целевую функцию, заключается в выборе норматива отчислений:

$$\Phi(\gamma) \to \max_{\gamma \in [0;1]}\, .$$

Если функции затрат агентов являются функциями типа Кобба-Дугласа, то есть $c_i(y_i) = \dfrac{1}{\alpha}\, (y_i)^{\alpha}\, (r_i)^{1-\alpha}$, $\alpha \geq 1$, $i \in N$, то решение этой задачи имеет вид:

$$\gamma^*(\alpha) = 1 - 1 / \alpha,$$

то есть оптимальное значение норматива отчислений $\gamma^*(\alpha)$ возрастает с ростом показателя степени α.

Централизованный механизм. Сравним найденные показатели со значениями, соответствующими другой схеме экономической мотивации агентов, а именно предположим, что центр использует *централизованную схему* – «забирает» себе весь доход от деятельности агентов, а затем компенсирует им затраты от выбираемых ими действий y_i в случае выполнения плановых заданий x_i (компенсаторная система стимулирования).

В этом случае целевая функция центра равна: $\Phi(x) = \lambda \sum_{i \in N} x_i - \sum_{i \in N} c_i(x_i)$.

Решая задачу $\Phi(x) \to \max_{\{x_i \geq 0\}}$, центр находит оптимальные значения планов: $x_i = r_i\, \xi(\lambda)$, $i \in N$.

Если агенты имеют функции затрат типа Кобба-Дугласа, то централизованный механизм экономической мотивации (с точки зрения организационной системы в целом) выгоднее, чем механизм отчислений, так как обеспечивает больший суммарный выпуск продукции и большее значение суммарной полезности всех элементов системы.

Механизм налога на прибыль. Если в качестве прибыли агента интерпретировать его целевую функцию – разность между доходом и затратами, то при ставке налога $\beta \in [0; 1]$ на эту прибыль целевая функция i-го агента примет вид: $f_{i\beta}(y_i) = (1 - \beta)\,[\lambda\, y_i - c_i(y_i)]$, $i \in N$, а целевая функция центра: $\Phi_\beta(y) = \beta\,[\lambda \sum_{i \in N} y_i - \sum_{i \in N} c_i(y_i)]$.

Действия, выбираемые агентами при использовании налога на прибыль, совпадают с действиями, выбираемыми ими при централизованной схеме, следовательно:

$$y_{i\beta} = r_i\, \xi(\lambda),\ i \in N.$$

Механизм налога на прибыль приводит к той же сумме полезностей и к тому же значению суммы равновесных действий агентов, что и централизованный механизм, но в первом случае полезность центра в β раз ниже, чем во втором. Поэтому механизм налога на прибыль может интерпретироваться как механизм компромисса, в котором *точка компромисса* внутри *области компромисса* определяется ставкой налога на прибыль, задающей пропорцию, в которой делится прибыль системы в целом между центром и агентами. Если агенты имеют функции затрат типа Кобба-Дугласа, то механизм налога на прибыль:

– при $\beta = 1 / \alpha^{\frac{1}{\alpha-1}}$ с точки зрения центра эквивалентен механизму отчислений;

– при $\beta = 1 - 1 / \alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$ с точки зрения агентов эквивалентен механизму отчислений;

– при $\beta = 1 / (1+\rho)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ с точки зрения центра эквивалентен механизму с нормативом рентабельности;

– при $\beta = 1 - \rho / (\alpha - 1)\ (1+\rho)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$ с точки зрения агентов эквивалентен механизму с нормативом рентабельности.

МЕХАНИЗМ С НОРМАТИВОМ РЕНТАБЕЛЬНОСТИ

Институт Проблем Управления РАН

Механизм с нормативом рентабельности. В случае использования норматива рентабельности $\rho \geq 0$ целевая функция центра равна:

$$\Phi_\rho(x) = \lambda \sum_{i \in N} x_i - (1 + \rho) \sum_{i \in N} c_i(x_i).$$

Решая задачу $\Phi_\rho(x) \to \max\limits_{\{x_i \geq 0\}}$, центр находит оптимальные значения планов:

$$x_{i\rho} = r_i\, \xi(\lambda / (1 + \rho)),\ i \in N.$$

Интересно, что максимум суммы целевых функций участников организационной системы (центра и агентов) – достигается при нулевом нормативе рентабельности, то есть в условиях полной централизации!

Если агенты имеют функции затрат типа Кобба-Дугласа, то механизм с нормативом рентабельности $\rho = \alpha - 1$ эквивалентен механизму отчислений.

МЕХАНИЗМ УЧАСТИЯ В ПРИБЫЛИ

Механизм участия в прибыли. Рассмотрим механизм участия в прибыли, в рамках которого центр получает прибыль $H(y)$ от деятельности агентов, а затем выплачивает каждому агенту фиксированную (и одинаковую для всех агентов, то есть механизм является унифицированным) долю $\Psi \in [0; 1]$ этой прибыли. Целевая функция i-го агента примет вид:

$$f_{i\Psi}(y) = \Psi\, H(y) - c_i(y_i),\ i \in N,$$

а целевая функция центра:

$$\Phi_\Psi(y) = (1 - n\,\Psi)\, H(y).$$

Действия, выбираемые агентами при механизме участия в прибыли, равны:

$$y_{i\Psi} = r_i\, \xi(\lambda\, \Psi),\ i \in N.$$

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

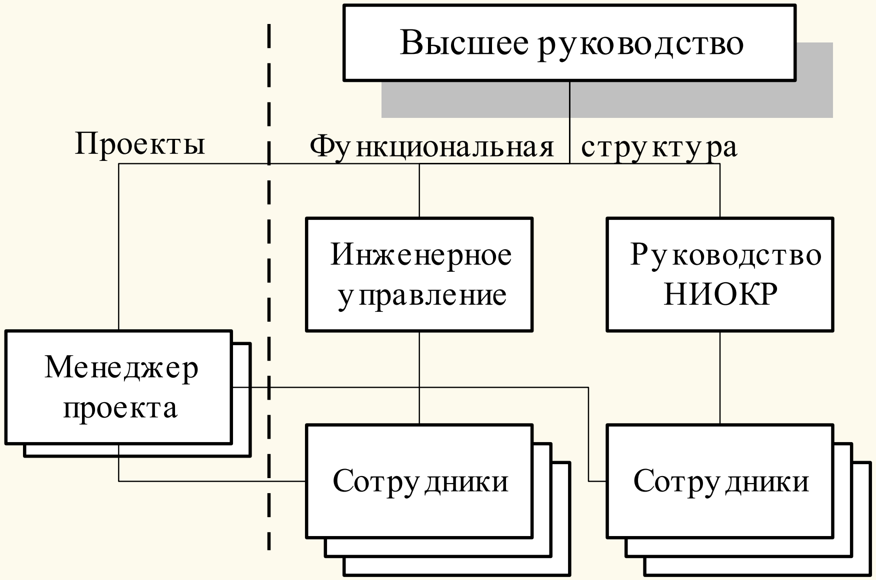
Сравнительный анализ. Таким образом, рассмотрены пять механизмов экономической мотивации. С точки зрения суммы полезностей всех участников системы и суммы действий агентов максимальной эффективностью обладают централизованный механизм и механизм налога на прибыль (с любой ставкой). Использование механизма отчислений или механизма с нормативом рентабельности приводит к меньшей эффективности. При использовании механизма отчислений, механизма с нормативом рентабельности или механизма налога на прибыль в зависимости от параметров (соответственно – норматива отчислений, норматива рентабельности и ставки налога на прибыль) полезности центра и агентов перераспределяются по-разному по сравнению с централизованным механизмом.

Использование полученных результатов позволяет в каждом конкретном случае получать оценки параметров, при которых различные механизмы эквивалентны. Так, например, при квадратичных функциях затрат ($\alpha = 2$) оптимально следующее значение норматива отчислений (ставки налога с дохода): $\gamma^* = 0{,}5$. При $\rho^* = 1$ механизм с нормативом рентабельности полностью эквивалентен механизму отчислений, а при $\beta^* = 0{,}5$ механизм налога на прибыль эквивалентен им обоим с точки зрения центра, а при $\beta^* = 0{,}75$ – с точки зрения агентов:

Параметры механизмов экономической мотивации при квадратичных затратах агентов

Механизм	Параметры			
	Φ / W	Y / W	Σ / W	$\sum_{i \in N} f_i / W$
Налог с дохода	$\lambda^2 / 4$	$\lambda / 2$	$3\lambda^2 / 8$	$\lambda^2 / 8$
Централизованный	$\lambda^2 / 2$	λ	$\lambda^2 / 2$	0
Норматив рентабельности	$\lambda^2 / (2(1+\rho))$	$\lambda / (1+\rho)$	$\lambda^2 (1+2\rho) / (2\,(1+\rho)^2)$	$\lambda^2 \rho / (2\,(1+\rho)^2)$
Налог на прибыль	$\beta\lambda^2 / 2$	λ	$\lambda^2 / 2$	$(1-\beta)\lambda^2 / 2$
Участие в прибыли	$\lambda^2 / (4\,n)$	$\lambda / (2\,n)$	$\lambda^2 (2\,n - 1) / (4\,n^2)$	$\lambda^2 (n-1) / (4\,n^2)$

МЕХАНИЗМ СТИМУЛИРОВАНИЯ В ОРГАНИЗАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ КОНТРОЛЕМ



Пример матричной структуры управления

ОС состоит из одного агента и k центров. Стратегией агента является выбор действия $y \in A$, что требует от него затрат $c(y)$. Каждый центр получает от деятельности агента доход, описываемый функцией $H_i(y)$, и выплачивает агенту стимулирование $\sigma_i(y)$, $i \in K = \{1, 2, \ldots, k\}$ – множеству центров. Таким образом, целевая функция i-го центра имеет вид

(1) $\Phi_i(\sigma_i(\cdot), y) = H_i(y) - \sigma_i(y)$, $i \in K$,

а целевая функция агента:

(2) $f(\{\sigma_i(\cdot)\}, y) = \sum_{i \in K} \sigma_i(y) - c(y)$.

Порядок функционирования следующий: центры одновременно и независимо выбирают функции стимулирования и сообщают их агенту, который затем выбирает свое действие.

Рассмотрим множество Парето-эффективных равновесий Нэша игры центров, в которых их стратегии имеют вид

$$\sigma_i(x, y) = \begin{cases} \lambda_i, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}, \ i \in K.$$

Содержательно, центры договариваются о том, что будут побуждать агента выбирать действие $x \in A$ – *план* – и осуществлять совместное стимулирование. Такой режим взаимодействия центров называется режимом сотрудничества.

Из условий оптимальности по Парето следует, что сумма вознаграждений, получаемых агентом от центров в случае выполнения плана, равна его затратам (обобщение принципа компенсации затрат на системы с распределенным контролем), то есть: $\sum_{i \in K} \lambda_i = c(x)$.

Условие выгодности сотрудничества для каждого из центров можно сформулировать следующим образом: в режиме сотрудничества каждый центр должен получить полезность не меньшую, чем он мог бы получить, осуществляя стимулирование агента в одиночку (компенсируя последнему затраты по выбору наиболее выгодного для данного центра действия).

РЕЖИМ СОТРУДНИЧЕСТВА

Институт Проблем Управления РАН

Полезность i-го центра от «самостоятельного» взаимодействия с агентом равна

$$W_i = \max_{y \in A} [H_i(y) - c(y)],\ i \in K.$$

Обозначим $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$, $S = \{x \in A \mid \exists \lambda \in \Re_+^k:\ H_i(x) - \lambda_i \geq W_i,\ i \in K,\ \sum_{i \in K} \lambda_i = c(x)\}$ – множество таких действий агента, для реализации которых сотрудничество выгодно для центров.

Множество пар $x \in S$ и соответствующих векторов λ называется *областью компромисса*:

$$\Lambda = \{x \in A, \lambda \in \Re_+^k \mid H_i(x) - \lambda_i \geq W_i,\ i \in K,\ \sum_{i \in K} \lambda_i = c(x)\}.$$

Режим сотрудничества по определению имеет место, если область компромисса не пуста: $\Lambda \neq \varnothing$. В режиме сотрудничества агент получает нулевую полезность.

Обозначим $W_0 = \max_{y \in A} [\sum_{i \in K} H_i(y) - c(y)]$. Легко показать, что область компромисса не пуста тогда и только тогда, когда: $W_0 \geq \sum_{i \in K} W_i$. Содержательно, действуя совместно, центры могут получить большую суммарную полезность, чем действуя в одиночку. Разность $W_0 - \sum_{i \in K} W_i$ может интерпретироваться как мера согласованности интересов центров и характеристика эмерджентности ОС.

Если условие (9) не выполнено и $\Lambda = \varnothing$, то имеет место **режим конкуренции центров**, характеризуемый так называемым аукционным решением. Упорядочим (перенумеруем) центров в порядке убывания величин $\{W_i\}$: $W_1 \geq W_2 \geq \dots \geq W_k$. Победителем будет первый центр, который предложит агенту, помимо компенсации затрат, полезность, на сколь угодно малую величину превышающую W_2.

Теория контрактов – раздел теории управления социально-экономическими системами, изучающий теоретико-игровые модели взаимодействия управляющего органа – центра (principal) – и управляемого субъекта – агента (agent), функционирующих в условиях внешней вероятностной неопределенности.

Учет неопределенности в моделях теории контрактов производится следующим образом: *результат деятельности* агента $z \in A_0$ является случайной величиной, реализация которой зависит как от действий агента $y \in A$, так и от внешнего неопределенного параметра – *состояния природы* $\theta \in \Omega$. Состояние природы отражает внешние условия деятельности агента, в силу которых результат деятельности может отличаться от действия.

Информированность участников следующая: на момент принятия решений участники знают распределение вероятностей состояния природы $p(\theta)$, или условное распределение результата деятельности $p(z, y)$. Действия агента не наблюдаются центром, которому становится известным лишь результат деятельности. Агент может либо знать состояние природы на момент выбора своего действия (случай асимметричной информированности), либо знать только его распределение.

5. ЗАДАЧА СТИМУЛИРОВАНИЯ В УСЛОВИЯХ ВЕРОЯТНОСТНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Стратегией центра является выбор функции $\sigma(\cdot)$ от результата деятельности агента, которая в зависимости от содержательных трактовок модели может интерпретироваться как функция стимулирования (трудовые контракты), величина страхового возмещения (страховые контракты), величина задолженности или выплат (долговые контракты) и т.д. Стратегией агента является выбор действия при известной стратегии центра. Под *контрактом* понимается совокупность стратегий центра и агента (различают как явные, то есть зафиксированные с юридической точки зрения (большинство страховых и долговых контрактов являются явными), так и неявные, то есть не заключаемые формально или подразумеваемые контракты (в ряде случаев таковыми являются трудовые контракты), контракты.

Так как результат деятельности агента, значение которого определяет полезности участников ОС, зависит от неопределенных параметров, то будем считать, что при принятии решений они усредняют свои полезности по известному распределению вероятностей и выбирают стратегии, максимизирующие соответствующую ожидаемую полезность.

Оптимальным является контракт, который наиболее выгоден для центра (максимизирует его целевую функцию), при условии, что агенту взаимодействие с центром также выгодно. Последнее означает, что с точки зрения агента, одновременно должны выполняться два условия – условие участия и условие индивидуальной рациональности.

ПРИМЕР

Институт Проблем Управления РАН

Пример. Пусть у агента имеются два допустимых действия: $A = \{y_1; y_2\}$, и возможны два результата: $A_0 = \{z_1; z_2\}$, $P = \begin{Vmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{Vmatrix}$, $½ < p \le 1$. Содержательно, результат деятельности агента в большинстве случаев (так как $p > ½$) «совпадает» с соответствующим действием.

Обозначим затраты агента по выбору первого и второго действия c_1 и c_2 соответственно, $c_2 \ge c_1$; ожидаемый доход центра от выбора первого и второго действия – H_1 и H_2 соответственно; стимулирование агента за первый и второй результат деятельности – σ_1 и σ_2 соответственно; целевую функцию центра, представляющую собой разность между доходом и стимулированием – Φ, целевую функцию агента, представляющую собой разность между стимулированием и затратами – f.

Задача центра заключается в назначении системы стимулирования, которая максимизировала бы ожидаемое значение его целевой функции $E\Phi$ при условии, что выбираемое агентом действие максимизирует ожидаемое значение Ef его собственной целевой функции.

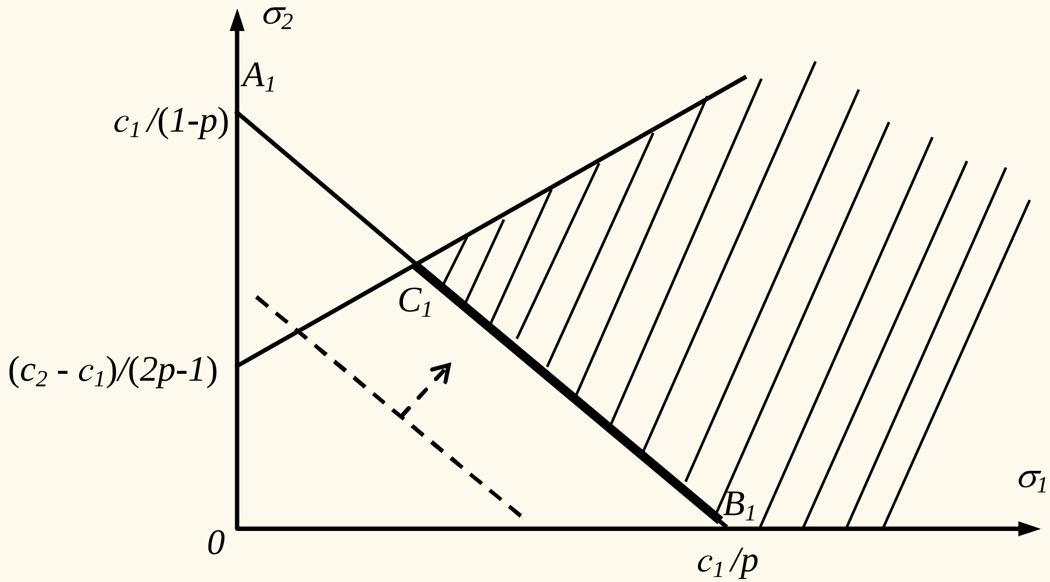
Допустим, что агент *нейтрален к риску* (то есть его *функция полезности*, отражающая отношение к риску, линейна), и рассмотрим какую систему стимулирования центр должен использовать, чтобы побудить агента выбрать действие y_1. В предположении равенства нулю резервной полезности задача поиска минимальной системы стимулирования, реализующей действие y_1, имеет вид (первое ограничение является ограничением согласованности стимулирования, второе – ограничением индивидуальной рациональности агента):

(1) $p\ \sigma_1 + (1-p)\ \sigma_2 \to \min\limits_{\sigma_1 \ge 0,\ \sigma_2 \ge 0}$

(2) $p\ \sigma_1 + (1-p)\ \sigma_2 - c_1 \ge p\ \sigma_2 + (1-p)\ \sigma_1 - c_2$

(3) $p\ \sigma_1 + (1-p)\ \sigma_2 - c_1 \ge 0.$

Задача (1)-(3) является задачей линейного программирования.



Реализация центром действия y_1 при нейтральном к риску агенте

Множество значений стимулирования, удовлетворяющих условиям (2) и (3), заштриховано на **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, его подмножество, на котором достигается минимум выражения (1), выделено жирной линией (линия уровня функции (1), отмеченная на рисунке пунктирной линией, имеет тот же наклон, что и отрезок A_1B_1, направление возрастания отмечено стрелкой).

РЕАЛИЗАЦИЯ ЦЕНТРОМ ДЕЙСТВИЯ y2 ПРИ НЕЙТРАЛЬНОМ К РИСКУ АГЕНТЕ

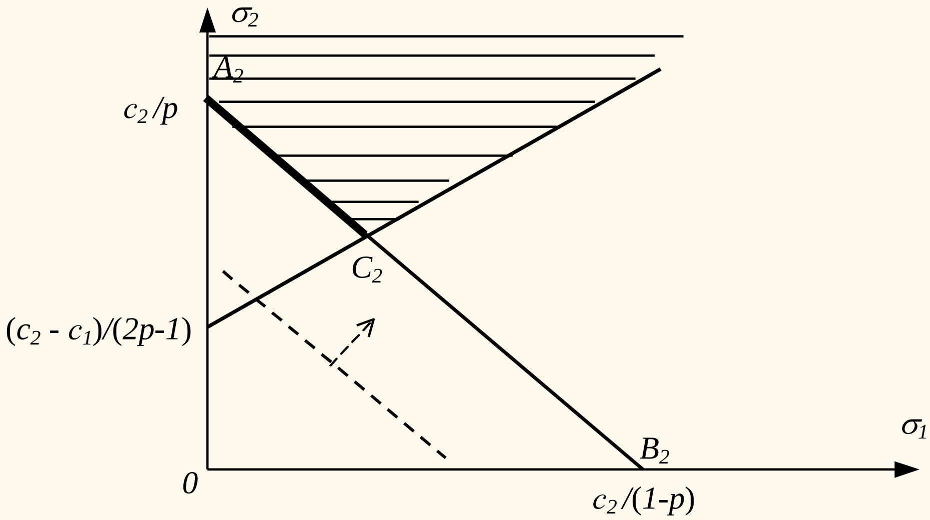
Для определенности в качестве решения (в рамках гипотезы благожелательности) выберем из отрезка C_1B_1 точку C_1, характеризуемую следующими значениями:

$$\sigma_1 = [p\, c_1 - (1-p)\, c_2] / (2\, p - 1),\ \sigma_2 = [p\, c_2 - (1-p)\, c_1] / (2\, p - 1).$$

Легко проверить, что ожидаемые затраты центра на стимулирование $E\sigma(y_1)$ по реализации действия y_1 равны c_1, то есть $E\sigma(y_1) = c_1$.

Предположим теперь, что центр хочет реализовать действие y_2. Решая задачу, аналогичную (1)-(3), получаем (см. точку C_2 на рисунке):

$$\sigma_1 = [p\, c_1 - (1-p)\, c_2] / (2\, p - 1),\ \sigma_2 = [p\, c_2 - (1-p)\, c_1] / (2\, p - 1),\ E\sigma(y_2) = c_2.$$



Реализация центром действия y_2 при нейтральном к риску агенте

На втором шаге центр выбирает, какое из допустимых действий ему выгоднее реализовать, то есть какое действие максимизирует разность между доходом и ожидаемыми затратами центра на стимулирование по его реализации. Таким образом, ожидаемое значение целевой функции центра при заключении оптимального контракта равно $\Phi^* = \max \{H_1 - c_1, H_2 - c_2\}$.

Закон Парето и распределение Парето. Известен так называемый закон Парето (иногда его называют «закон 80 / 20», на жаргоне – «пивной закон», в соответствии с которым 20 % людей выпивают 80 % пива), отражающий неравномерность распределения характеристик экономических и социальных явлений и процессов:

- 20 % населения владеют 80 % капиталов (первоначальная формулировка самого В. Парето);
- 80 % стоимости запасов на складе составляет 20 % номенклатуры этих запасов;
- 80 % прибыли от продаж приносят 20 % покупателей;
- 20 % усилий приносят 80 % результата;
- 80 % проблем обусловлены 20 % причин;
- за 20 % рабочего времени работники выполняют 80 % работы;
- 80 % работы выполняют 20 % работников и т.д.

«Формализацией» закона Парето является **распределение Парето** случайной величины $z \geq y > 0$, характеризуемое двумя параметрами – минимально возможным значением y и показателем степени $\alpha > 0$:

$$(1)\ p(\alpha, y, z) = \frac{\alpha}{y}\left(\frac{y}{z}\right)^{1+\alpha}.$$

Плотности распределения (1) соответствует интегральная функция распределения

$$(2)\ F(\alpha, y, z) = 1 - \left(\frac{y}{z}\right)^{\alpha}.$$

Распределение Парето обладает свойством самоподобия: распределение значений, превышающих величину $z^0 \geq y$, также является распределением Парето:

(3) $\forall\, z^0 \geq y \;\; p(\alpha, z^0, z) = p(\alpha, y, z) / (1 - F(\alpha, y, z^0)) = \dfrac{\alpha}{z^0}\left(\dfrac{z^0}{z}\right)^{1+\alpha}$.

Для распределения Парето существуют только моменты, порядка, меньшего, чем степень α. Например, математическое ожидание случайной величины z с распределением (1) существует при $\alpha > 1$ и равно

(4) $E\,z = \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}\, y$.

Приведем формальную интерпретацию «закона 80 / 20». Предположим, что z – характеристика эффективности агента, а рассматриваемое распределение определяет количество агентов с разной эффективностью. Определим $\tilde{z}$ такое, что Prob $\{z \leq \tilde{z}\} = 0.8$: $\tilde{z} = (0.2)^{\frac{1}{\alpha}} z_0$. Далее определим суммарную эффективность «элиты»: $\int\limits_{\tilde{z}}^{+\infty} z\,p(z_0, \alpha)\mathrm{d}z = (0.2)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \dfrac{\alpha}{\alpha - 1} z_0$, которая должна составлять 80 % от эффективности всего коллектива $E\,z$: $(0.2)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \dfrac{\alpha}{\alpha - 1} z_0 = 0.8\, \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}\, z_0$.

Получаем, что показатель степени α, при котором распределение Парето описывает закон Парето, должен быть равен 1.161. Аналогичным образом можно определить, что при $\alpha = 2$ 20 % коллектива будут обладать 45 % общей эффективности и т.д.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СТИМУЛИРОВАНИЯ

Институт Проблем Управления РАН

Постановка задачи стимулирования. Рассмотрим задачу стимулирования, в которой присутствует внешняя вероятностная неопределенность – результат деятельности агента z является случайной величиной, распределение которой зависит от его действия y.

Будем считать, что агент выбирает действие $y \geq 0$, которое под влиянием внешней среды приводит к реализации результата деятельности $z \geq 0$. Пусть задана плотность распределения вероятности $p(z, y)$ – вероятность реализации результата деятельности z при выборе агентом действия y.

Предположим, что на момент принятия решений участники (центр и агент) не знают результата деятельности, а имеют лишь информацию о распределении $p(z, y)$ и используют ожидаемую полезность для устранения неопределенности, т.е. целевыми функциями участников являются математические ожидания соответствующих функций полезности: функции полезности центра $\tilde{\Phi}(z, y) = H(y) - \tilde{\sigma}(z)$ и функции полезности агента $\tilde{f}(z, y) = u(\tilde{\sigma}(z)) - c(y)$, где $u(\cdot)$ – функция полезности, $\tilde{\sigma}(z)$ – функция стимулирования, $H(y)$ – функция дохода центра, $c(y)$ – функция затрат агента, относительно которой предположим, что она является гладкой, выпуклой, неубывающей функцией с нулевой производной при нулевом действии агента.

Порядок функционирования и информированность участников ОС следующие: центр сообщает агенту систему стимулирования $\tilde{\sigma}(z)$, т.е. зависимость вознаграждения агента от результата его деятельности, после чего агент выбирает свое действие, ненаблюдаемое для центра. Принципиально важно, что в рассматриваемой модели ни центр, ни агент на момент выбора своих стратегий не знают будущего значения результата деятельности.

Агент выберет действие из множества $P(\tilde{\sigma}(\cdot))$ действий, доставляющих максимум математическому ожиданию его функции полезности, т.е.:

$$P(\tilde{\sigma}(\cdot)) = \operatorname{Arg}\max_{y \geq 0} \left[\int u(\tilde{\sigma}(z))\, p(z, y)\, dz - c(y) \right].$$

ЗАДАЧА СТИМУЛИРОВАНИЯ, ПАРЕТО-АГЕНТ И ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ СТИМУЛИРОВАНИЯ

Институт Проблем Управления РАН

Пусть выполнена гипотеза благожелательности (при прочих равных агент выбирает наиболее выгодные для центра действия). Тогда **задача стимулирования** заключается в выборе системы стимулирования $\tilde{\sigma}(\cdot)$, максимизирующей эффективность стимулирования – математическое ожидание функции полезности центра на множестве (6):

$$\max_{y \in P(\tilde{\sigma}(\cdot))} [H(y) - \int \tilde{\sigma}(z) p(z, y) dz] \to \max_{\tilde{\sigma}(\cdot)} .$$

Парето-агент – агент, распределение результатов деятельности которого описывается распределением Парето (действие – минимально возможное значение результата).

Линейная система стимулирования. Фиксируем план $x \geq 0$. Оптимальной линейной системой стимулирования, реализующей план x, является следующая:

$$\sigma_L(x, y) = c'(x)\,(y - x) + c(x).$$

Найдем линейную систему стимулирования $\tilde{\sigma}_L(x, z) = a\,z + b$, где a и b – константы, такую, что $E\tilde{\sigma}_L(x, z) = \sigma_L(x, y)$. Легко вычислить, что константы a и b должны быть следующими: $a = \frac{\alpha - 1}{\alpha} c'(x)$, $b = c(x) - c'(x)\,x$. Итак, получаем, что линейная система стимулирования

$$\tilde{\sigma}_L(x, z) = \frac{\alpha - 1}{\alpha} c'(x)\,z + c(x) - c'(x)\,x$$

реализует план x (побуждает агента выбрать действие, совпадающее с планом), и ее математическое ожидание в точности равно (для любого $y > 0$) оптимальной детерминированной системе стимулирования.

Зная, что агент выберет действие, совпадающее с планом, оптимальный план можно найти из решения следующей задачи:

$$x^* = \arg\max_{x \geq 0} [H(x) - c(x)].$$

Компенсаторная система стимулирования. Задача синтеза оптимальной компенсаторной системы стимулирования в организационной системе с Парето-агентом заключается в нахождении такой системы стимулирования $\tilde{\sigma}_K(z)$, математическое ожидание которой равно затратам агента: $E\,\tilde{\sigma}_K(z) = c(y)$, $y \geq 0$, то есть $\alpha\, y^{\alpha} \int_{y}^{+\infty} \frac{\tilde{\sigma}_K(z)}{z^{\alpha+1}}\, dz = c(y)$, $y \geq 0$.

Пусть агент имеет функцию затрат типа Кобба-Дугласа: $c(y) = \frac{1}{\gamma}\,(y)^{\gamma}\,(r)^{1-\gamma}$, $\gamma \geq 1$. Будем искать решение в классе степенных функций стимулирования:

$$\tilde{\sigma}_K(z) = \frac{1}{\beta_0}\, z^{\beta_1}\, r^{1-\beta_2}.$$

Решение $\beta_0 = \frac{\alpha\gamma}{\alpha-\gamma}$, $\beta_1 = \gamma$, $\beta_2 = \gamma$, существует при условии $1 \leq \gamma < \alpha$.

Таким образом, если в модели Парето-агента с функцией затрат типа Кобба-Дугласа оптимальна «компенсаторная» система стимулирования $\tilde{\sigma}_K(z) = \frac{\alpha-\gamma}{\alpha\gamma}\, z^{\gamma}\, r^{1-\gamma}$.

Тарифная (скачкообразная система) стимулирования. В детерминированном случае оптимальна скачкообразная система стимулирования

$$\sigma_C(x, y) = \begin{cases} c(x), & y \ge x \\ 0, & y < x \end{cases}.$$

Рассмотрим следующую скачкообразную систему стимулирования в модели Парето-агента:

$$\tilde{\sigma}_C(x, z) = \begin{cases} c(x), & z \ge x \\ 0, & y < x \end{cases}.$$

Вычислим математическое ожидание:

$$E\,\tilde{\sigma}_C(x, z) = c(x)\begin{cases} 1, & y \ge x \\ \left(\dfrac{y}{x}\right)^{\alpha}, & y \le x \end{cases}.$$

Условие выгодности для агента выбора действия $x \ge 0$ имеет вид:

$$\forall y \in [0; x] \quad \frac{c(y)}{y^{\alpha}} \ge \frac{c(x)}{x^{\alpha}}.$$

Таким образом, если выполнено

$$\forall y \in [0; x^*] \quad \frac{c(y)}{y^{\alpha}} \ge \frac{c(x^*)}{(x^*)^{\alpha}},$$

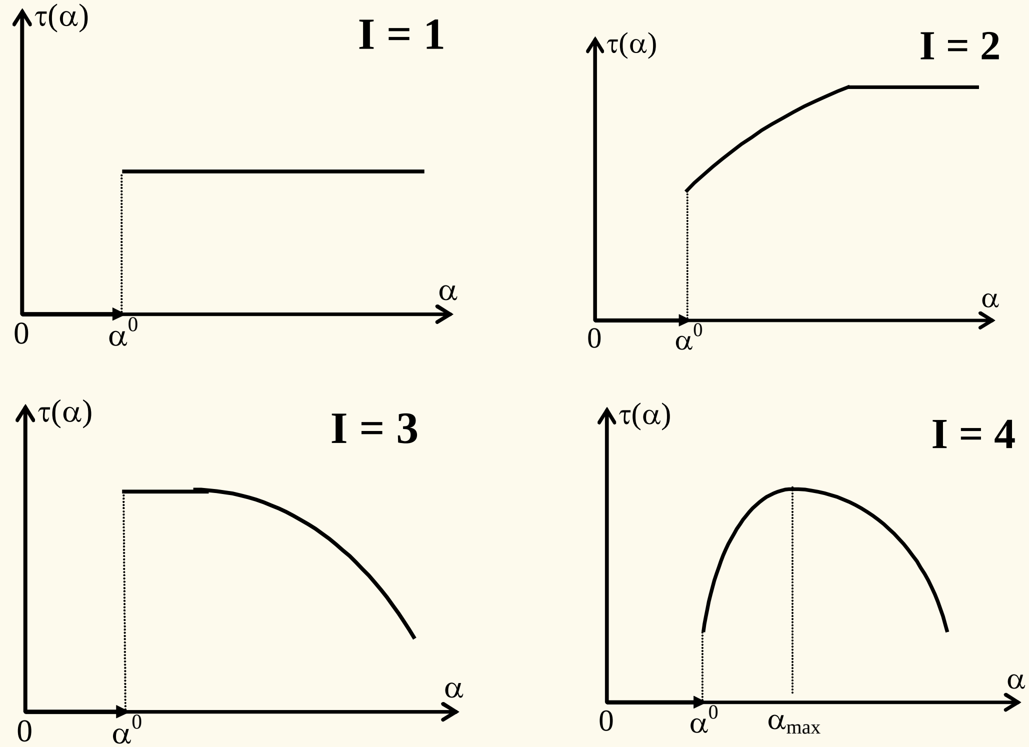
то в модели Парето-агента оптимальна скачкообразная система стимулирования $\tilde{\sigma}_C(x, z)$. Если агент имеет функцию затрат типа Кобба-Дугласа, то последнее условие переходит в $1 \le \gamma < \alpha$.

6. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМ СТИМУЛИРОВАНИЯ

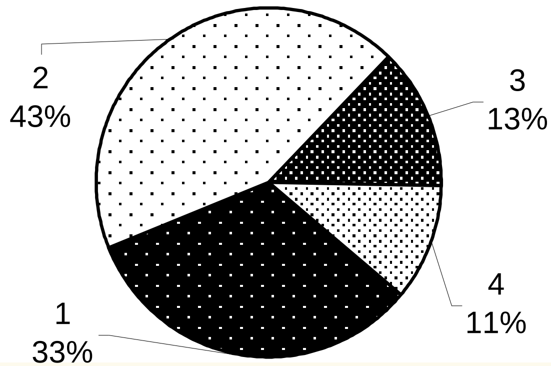
Источники информации:

1. Результаты финансово-хозяйственной деятельности;
2. Аналоги;
3. Статистические данные;
4. Нормативы;
5. Экспертные оценки;
6. Анкетирование;
7. «Активная идентификация».

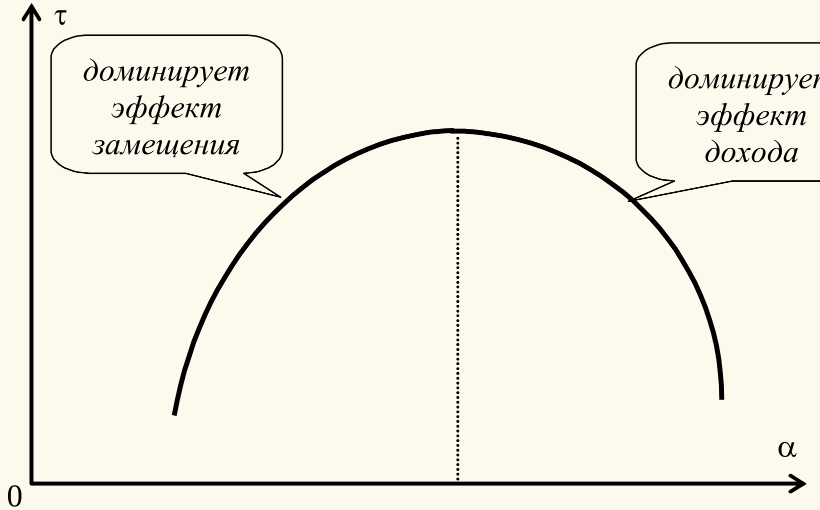
Индивидуальные стратегии предложения труда



Распределение респондентов по индексу (I)



СТРАТЕГИИ ПРЕДЛОЖЕНИЯ ТРУДА

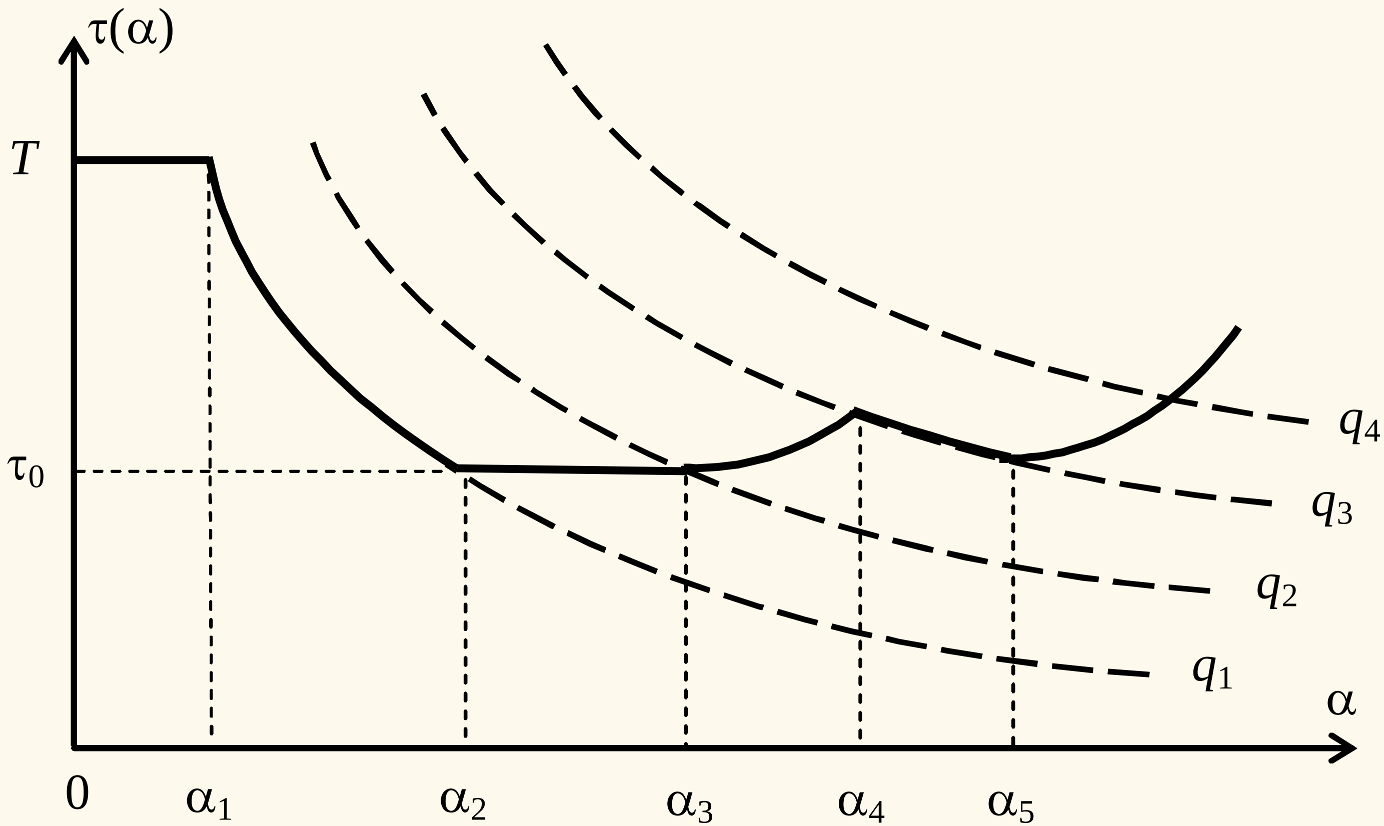


Гипотетическая зависимость желательной продолжительности рабочего времени от ставки оплаты («*кривая обратного изгиба*»)

u(*q*, *t*) - *функция полезности;*
q - совокупный доход агента;
$t \in [0; T]$ - продолжительность досуга;
T = 16 часов;
τ - рабочее время;
$t = T - \tau$.

Стратегия 1 – максимизация дохода, независимо от свободного времени.
Стратегия 2 – максимизация свободного времени, независимо от дохода.
Стратегия 3 – максимизация дохода при некотором постоянном значении продолжительности свободного времени.
Стратегия 4 – максимизация свободного времени при постоянном уровне дохода.
Стратегия 5 – продолжительность рабочего времени должна быть не меньше, чем некоторая фиксированная величина $\tau-$, и не больше, чем некоторая фиксированная величина $\tau+$.
Стратегия 6 – обеспечение полезности, не меньшей заданного уровня γ.

КОМБИНАЦИИ СТРАТЕГИЙ



Всего в опросе приняли участие более 6300 человек, при анализе использовались результаты **5541** анкеты. Из 5541 респондентов 2725 – проживающие в Москве.

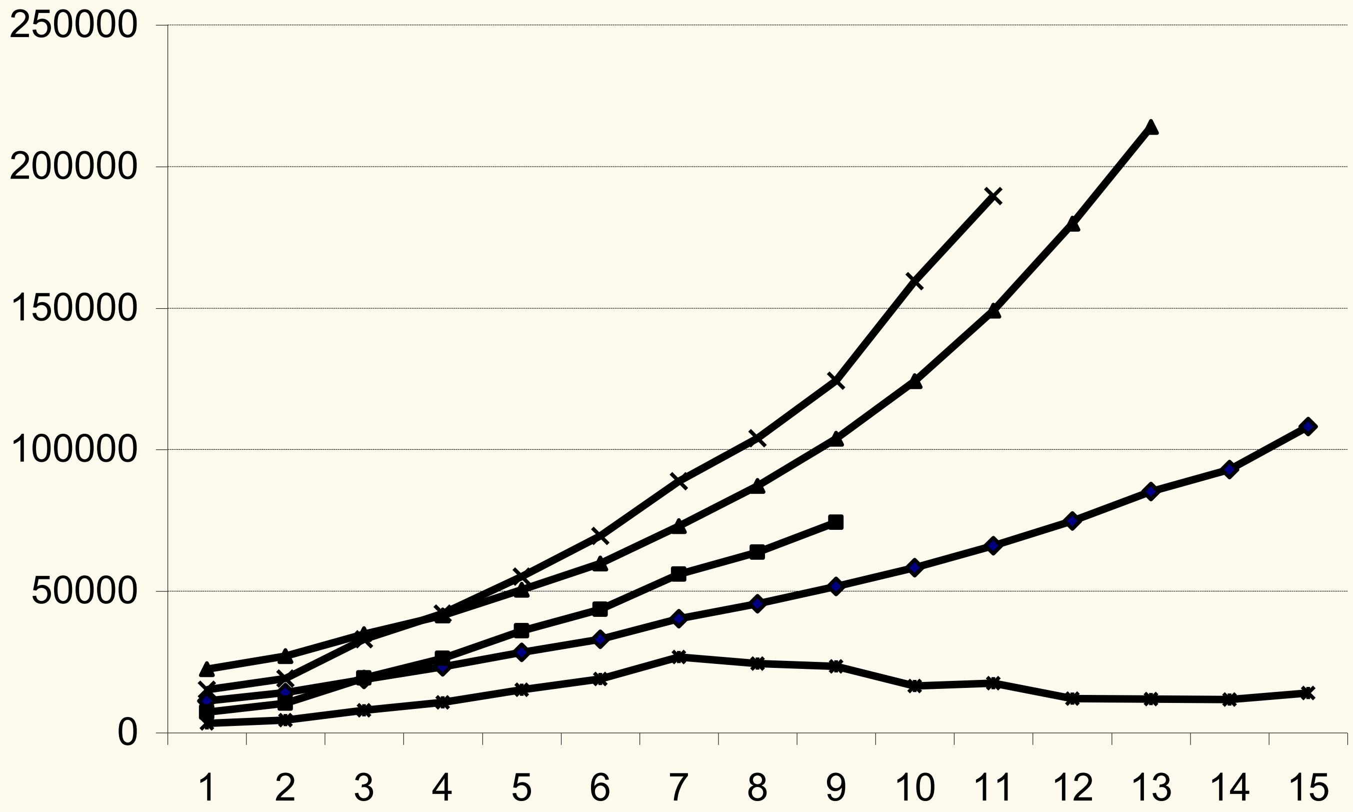
Показатели. Отметим, что в качестве первичных использовались:

- *первичные социальные показатели*: пол, возраст, семейное положение, состав семьи (число совместно проживающих иждивенцев – детей и пенсионеров), образование, обучение в настоящий момент (тип учебного заведения), должность;

- *первичные экономические показатели*: фактический личный суммарный заработок на основном месте работы, фактическая средняя ежедневная продолжительность оплачиваемого рабочего времени на основном месте работы, фактический среднедушевой доход на члена семьи с учетом всех работающих, минимальная величина месячной заработной платы, за которую респондент согласен работать ежедневно в течение данного количества часов (от 1 до 16 часов), желательная продолжительность ежедневного рабочего времени при данной ставке оплаты (от 40 до 1000 рублей в час).

ЗАВИСИМОСТЬ МИНИМАЛЬНОЙ ЖЕЛАТЕЛЬНОЙ ЗАРАБОТНОЙ ПЛАТЫ ОТ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ РАБОЧЕГО ВРЕМЕНИ

Институт Проблем Управления РАН



1) Существование «субъективной» справедливой ставки оплаты;
2) Линейное приближение (в диапазоне 4-10 часов);
3) Квадратичное приближение (в большем диапазоне).

ПЯТЬ ТИПОВ (ИНДЕКСОВ) АГЕНТОВ

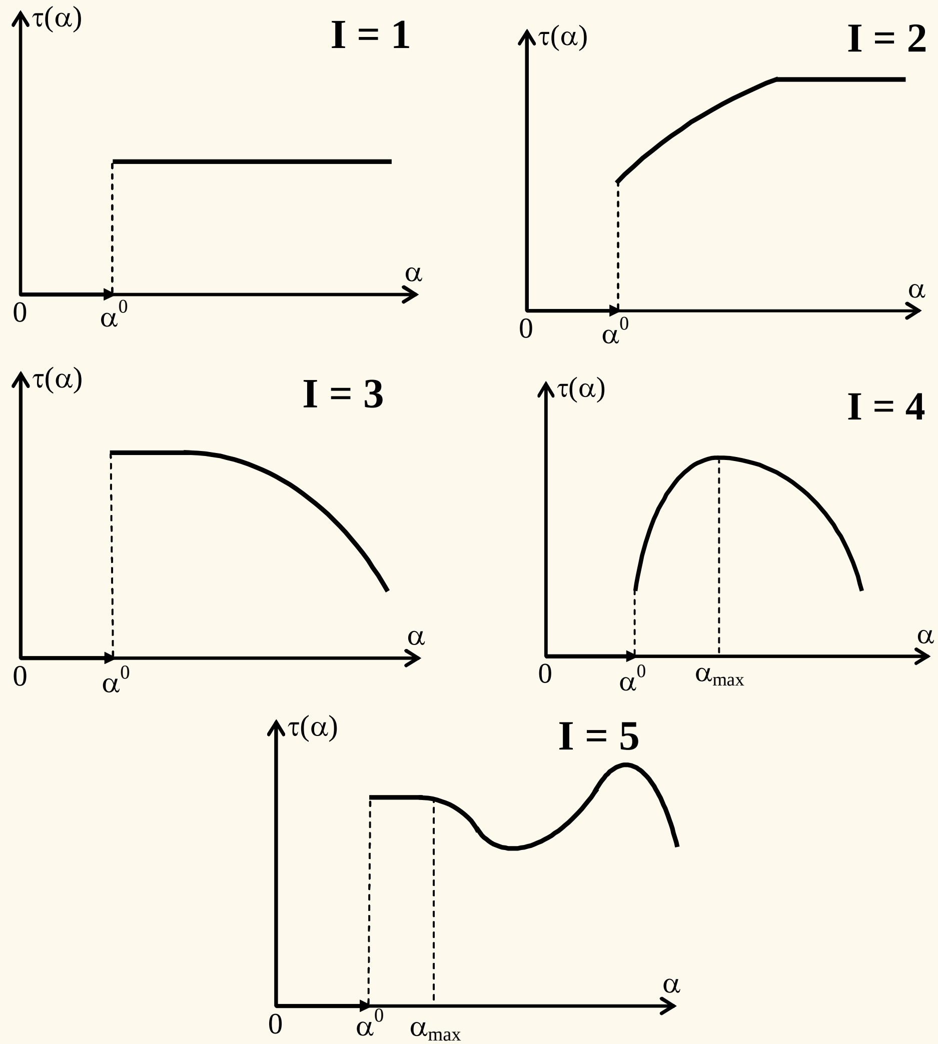
- **первый тип**: желательная продолжительность рабочего времени не зависит или почти не зависит от ставки оплаты, начиная с некоторой ее величины α^0 (при меньших ставках оплаты агент не согласен работать);

- **второй тип**: желательная продолжительность рабочего времени монотонно возрастает с ростом ставки оплаты, большей «минимальной» величины α^0;

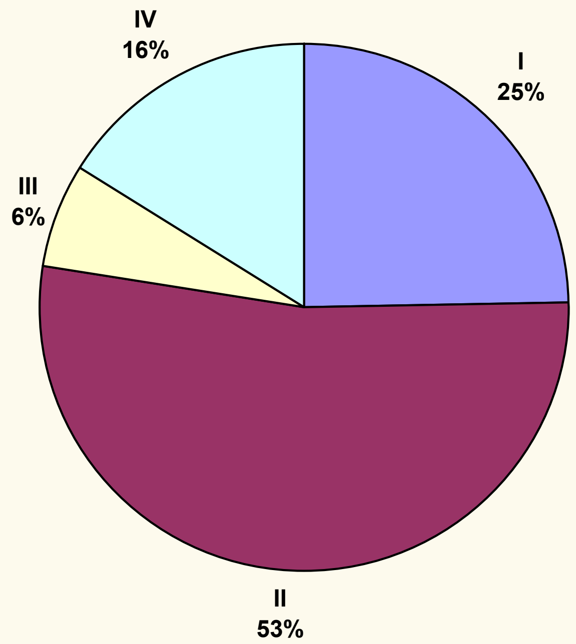
- **третий тип**: желательная продолжительность рабочего времени монотонно убывает с ростом ставки оплаты, большей «минимальной» величины α^0;

- **четвертый тип**: желательная продолжительность рабочего времени возрастает с ростом ставки оплаты, большей «минимальной» величины α^0, а затем (при $\alpha \geq \alpha_{max}$) убывает;

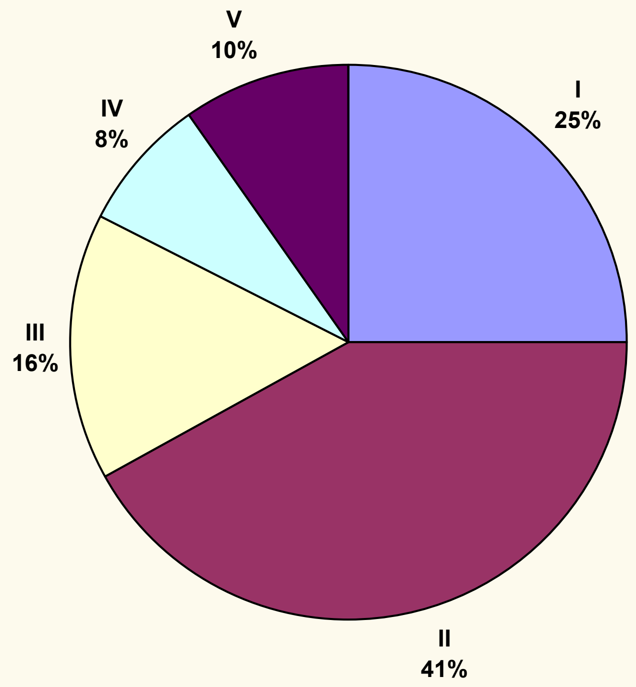
- **пятый тип**: желательная продолжительность рабочего времени ведет себя нетривиально (имеет минимум или имеет несколько точек экстремума и т.д.) с изменением ставки оплаты.



РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСПОНДЕНТОВ ПО ИНДЕКСУ (ВЫБОРКИ 1999 И 2009 Г.Г.)



Индекс (1999)



Индекс (2009)

Существование пяти различных значений «индекса» позволяет говорить о наличии пяти общих типов агентов, определяемых общностью классов их индивидуальных стратегий предложения труда.

ВЫВОДЫ

- экспертно выделено и экспериментально подтверждено существование пяти типов индивидуальных стратегий предложения труда, причем распределение по этим типам качественно схоже в выборках 1999, 2003 и 2009 г.г.;

- обосновано, что такие социальные характеристики агентов, как: пол, возраст, семейное положение, образование и т.д., не являются детерминирующими для типов индивидуальных стратегий предложения труда.

ЛИТЕРАТУРА

Институт Проблем Управления РАН

1. *Введение в теорию управления организационными системами*: Учебник.
– М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009.
2. Губко М.В., Новиков Д.А. *Теория игр в управлении организационными системами*.
– М.: Синтег, 2002.
3. **Новиков Д.А. Стимулирование в организационных системах. – М.: Синтег, 2003.**
4. Новиков Д.А. *Теория управления организационными системами*.
– М.: Физматлит, 2007.
5. Новиков Д.А. *Экспериментальное исследование индивидуальных стратегий предложения труда*. – М.: Эгвес, 2010.

Все работы можно найти в свободном доступе
в электронной библиотеке на сайте www.mtas.ru