Введение

Nothing was changed, but now it made sense.

U. K. Le Guin. The Beginning Place[1]

0.1. Зачем эта книга

Лучшие результаты любой математической теории — важные и интересные теоремы, в формулировках которых *нет* понятий из этой теории, но при доказательствах которых *без нее не обойтись*. К сожалению, в большинстве учебников такие результаты недостаточно доступны. Формулировки красивых результатов и важных проблем, ради которых была придумана теория, приводятся только *после* продолжительного изучения этой теории (или не приводятся совсем). Это способствует появлению представления о математике как о науке, изучающей немотивированные понятия и теории.

Таких блистательных результатов в алгебраической топологии много. Для удобства читателя в этой книге они выделены жирным шрифтом и, как правило, собраны в начале параграфов (вместе с краткой историей вопроса). Алгебраическая топология является фундаментальной частью математики и имеет применения за ее пределами. Как и в любой фундаментальной теории, ее основные мотивировки и идеи можно доступно изложить человеку, не имеющему глубоких специальных познаний. Такому изложению посвящена эта книга (вместе с [ST34, BE82, Pr19, An03, PS97, E84, FT16, Sk16, Sk, ZSS] и другими книгами). Ее особенность — возможность познакомиться с этими *мотивировками и идеями* на «олимпиадных» примерах, т. е. на простейших частных случаях, свободных от технических деталей, и со сведением к необходимому минимуму алгебраического языка. Благодаря этому я надеюсь сделать алгебраическую топологию более доступной и интересной — в первую очередь студентам и работающим в других областях математикам.

В книге рассматриваются важнейшие наглядные объекты математики, полезные для приложений: маломерные многообразия и векторные поля на них, непрерывные отображения и их деформации. Приводятся естественные построения для решения интересных топологических проблем и изящные доказательства красивых теорем с ясными и доступны-

[1]Ничего не изменилось, но теперь все было понятно. (У. К. Ле Гуин. Изначальное место. Пер. автора.)

ми формулировками. Показано, как при этом возникают полезные алгебраические понятия (группы гомологий, характеристические классы и т. д.)[2]. Именно на таких естественных построениях и доказательствах можно по-настоящему прочувствовать более общий теоретический материал (а при наличии некоторой математической культуры — и воссоздать его). Изучение, начинающееся с длительного освоения немотивированных общих понятий и теорий, делает малодоступными замечательные методы алгебраической топологии[3]. Часто изучившие курс могут воспроизвести сложную теорию, но не могут применить ее в простейшей ситуации, если не указано, что этой теорией нужно воспользоваться.

Новые вводимые понятия мотивированы тем, что интересно человеку, не считающему их интересными «сами по себе», и человеку, не интересующемуся специально топологией (но уже имеющему некоторое математическое образование). Например, доказательством красивой теоремы, решением важной задачи, осмыслением естественной идеи. Определения новых понятий естественно появляются (и четко формулируются) в этой ситуации, и потому их не обязательно знать заранее. В то же время для тех, кто уже изучал алгебраическую топологию, ее применение к конкретным задачам обычно оказывается нетривиальным и интересным.

Изложение построено «от частного к общему», «от простого к сложному», см. п. 0.3. Путь познания в какой-то мере повторяет путь развития. Такое изложение продолжает традицию, восходящую к древности [P]. В современном преподавании математики она представлена, например, журналом «Квант» и книгами «квантовских» авторов. Более подробно см. [ZSS, § 27, § 28]. Интересно, что приводимое изложение мне

---

[2]Важнейшие геометрические проблемы, ради которых была создана алгебраическая топология, в свою очередь были мотивированы предыдущим развитием математики (причем не только геометрии, но и анализа и алгебры). Мотивировать эти геометрические проблемы не входит в цели настоящей книги. Я либо привожу ссылки, либо апеллирую к непосредственной геометрической любознательности читателя.

[3]Приведу лишь один пример из многих. Еще в XIX веке был придуман очень простой, наглядный и полезный инвариант многообразий — форма пересечений, т. е. умножение в гомологиях поверхностей (п. 6.7, [Hi95]). Замечательным открытием Колмогорова и Александера 1930-х годов явилось обобщение этого инварианта на фигуры, не являющиеся многообразиями (умножение в когомологиях). Умножение Колмогорова—Александера менее наглядно и определяется более громоздко, чем форма пересечений, но зато имеет более продвинутые применения. Определение формы пересечений через умножение Колмогорова—Александера делает малодоступными ее замечательные применения. Поэтому форму пересечений иногда просто переоткрывают [Mo89].

приходилось сначала переоткрывать и лишь потом убеждаться, что первооткрыватели рассуждали так же, ср. [Hi95].

Надеюсь, принятый стиль изложения не только сделает материал более доступным, но позволит сильным студентам (для которых доступно даже абстрактное изложение) приобрести математический вкус. Он необходим, чтобы разумно выбирать проблемы для исследования, а также ясно излагать собственные открытия, не скрывая ошибок (или известности полученного результата) за чрезмерным формализмом. К сожалению, такое (непреднамеренное) сокрытие ошибок часто происходит с математиками, воспитанными на чрезмерно формальных курсах. Такое происходило и с автором этих строк; к счастью, почти все мои ошибки исправлялись *перед* публикациями.

Чтение этой книги и решение задач потребуют от читателя усилий. Однако эти усилия будут сполна оправданы тем, что вслед за великими математиками XX века в процессе изучения геометрических проблем читатель откроет некоторые основные понятия алгебраической топологии. Надеюсь, это поможет ему совершить собственные настолько же полезные открытия (не обязательно в математике)!

0.2. Основная идея

Алгебраическая топология основана на следующей простой идее, часто встречающейся при решении школьных (в частности, олимпиадных) задач. *Невозможность* некоторой конструкции можно доказывать путем построения алгебраического *препятствия* (называемого также *инвариантом*). Примером служит четность. Точно так же *неэквивалентность* конструкций часто доказывается путем построения алгебраического *инварианта*, их различающего (этот инвариант является *препятствием* к эквивалентности). Многие непохожие друг на друга задачи топологии естественно приводят к похожим *препятствиям.* В этой книге препятствия-инварианты, являющиеся целыми числами или вычетами по модулю 2, есть почти в каждом параграфе. А группы гомологий появляются только в п. 4.11 и § 6.

Таким образом, значительная часть алгебраической топологии — это изучение геометрических задач при помощи дискретных, комбинаторных (в частности, алгебраических) методов. Алгебраическую топологию раньше называли комбинаторной.

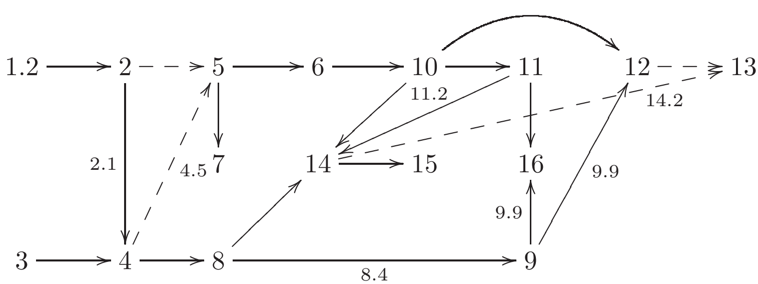
Применения теории препятствий разбиваются на два шага. Первый и обычно более простой шаг — получение необходимого условия на языке теории препятствий. Он приводится в этой книге. Второй и более сложный шаг — вычисление появляющихся препятствий. Он приводится лишь в виде наброска, цикла задач или просто ссылки (поскольку, по моему мнению, второй шаг лучше описан в литературе, чем первый). Замечу, что в простейших ситуациях очевидно, что полученное необходимое алгебраическое условие является достаточным. А вот для более сложных геометрических проблем, которые здесь не приводятся (например, о классификации многообразий или вложений), труднее всего именно доказать *достаточность* полученного необходимого условия.

0.3. Содержание и используемый материал

Книга предназначена в первую очередь для читателей, не владеющих алгебраической топологией (хотя, возможно, часть ее будет интересна и специалистам). Все необходимые алгебраические объекты (со страшными названиями «группы гомологий», «характеристические классы» и т. д.) естественно возникают и строго *определяются* в процессе исследования геометрических проблем. Для удобства читателя в п. 1.2, 2.1 приведены определения графов и простейших поверхностей.

В книге сначала показаны те идеи, которые видны на двумерных многообразиях (поверхностях; § 2—7). Затем — идеи, которые видны на трехмерных многообразиях (§ 8—10; § 8 и 10 интересны даже для трехмерного случая). Только потом рассматриваются многомерные многообразия. При этом двумерные и трехмерные многообразия все-таки интересны мне не сами по себе, а как простые объекты для демонстрации важных идей, которые могут приносить наиболее значительные плоды для многомерного случая. Характеристические классы по-настоящему незаменимы только для многообразий размерности выше трех.

Для многообразий методы алгебраической топологии наиболее наглядны. Это позволяет быстро добраться до по-настоящему интересных и сложных результатов. Хотя бо́льшая часть изложения использует язык «многомерных графов» (гиперграфов или симплициальных комплексов), в этой книге в основном собраны некоторые результаты и методы, касающиеся именно частного случая многообразий. Впро-



чем, для глубокого изучения многообразий более общие гиперграфы все-таки понадобятся. Аналогичное изложение для произвольных графов и гиперграфов см., например, в [Sk].

Выше приведена схема существенной зависимости параграфов. Явные ссылки приведены и в тексте. Такие ссылки не отражены в схеме, если в одном параграфе используется результат из другого, но необходима только формулировка результата, а не более глубокое его понимание. Пунктир в схеме означает, что один параграф нужен для мотивировки другого, но формально не используется в нем. Номера пунктов у стрелки означают, что используются только эти пункты.

В начале большинства параграфов приведены формулировки доказываемых в них результатов. Основное содержание книги — не эти результаты, а методы их доказательств. Однако эти методы не были бы так интересны, если бы они не давали красивых результатов, формулировки которых доступны неспециалисту. Сложность материала внутри каждого параграфа растет. Поэтому вполне разумно переходить к новому параграфу, отложив окончание старого. Пункты, отмеченные звездочкой, можно пропустить без ущерба для понимания остального материала. Как правило, в них приводится краткое упрощенное изложение более продвинутого материала.

При изучении примеров, мотивирующих общее понятие групп гомологий, возникают все новые и новые частные случаи (п. 4.7—4.11, § 6, п. 7.3, 8.4, 9.4—9.9). Полезно продумать несколько таких примеров перед знакомством с абстрактным изложением этого понятия в п. 10.6. Формально п. 10.6 не зависит от многих предыдущих параграфов. Но в нем нет ответа на вопрос «зачем», важного для начала изучения любой теории.

0.4. Задачи

Бóльшая часть материала сформулирована в виде задач. Красивые наглядные задачи, для решения которых не нужно никаких знаний, приведены уже в самом начале. Обучение путем решения задач не только характерно для серьезного изучения математики, но и продолжает древнюю культурную традицию. Например, послушники дзэнских монастырей обучаются, размышляя над загадками, данными им наставниками [S].

Следует подчеркнуть, что многие задачи не используются в остальном тексте. В задачах сформулированы интересные и полезные факты или изложены идеи доказательства теорем. Читателю полезно ознакомиться с самими фактами и понимать идеи доказательств, даже если детали останутся недоступными. Приводимые формулировки задач могут быть путеводителем по другим учебникам по алгебраической топологии, позволяя намечать интересные конечные цели и отбрасывать материал, не являющийся для этих целей необходимым. Полезнее всего обсуждать со специалистом как решения задач, так и возникающие при решении трудности.

Для решения каждой задачи (без звездочки) достаточно знакомства с настоящим текстом и *не требуется* никаких дополнительных понятий и теорий. Если используемые в задаче термины не определены в этом тексте и вам незнакомы, то соответствующую задачу следует просто игнорировать. К важнейшим задачам приводятся указания и решения. Они расположены в конце каждого параграфа. Однако к ним стоит обращаться после прорешивания каждой задачи.

Если задача выделена словом «теорема» («следствие» и т. д.), то ее утверждение важное. Как правило, мы приводим *формулировку* красивого или важного утверждения (в виде задачи) перед его *доказательством.* (Часто происходит обратное, см. начало п. 0.1.) В таких случаях для доказательства утверждения могут потребоваться следующие задачи. Это всегда явно оговаривается в подсказках, а иногда и прямо в тексте. Поэтому если некоторая задача не получается, то читайте дальше. (На занятии задача-подсказка дается только тогда, когда студент подумал над самой задачей.) Такой процесс обучения полезен, поскольку моделирует реальную исследовательскую ситуацию.

В указаниях к некоторым задачам встречаются ссылки на web-страницу книги [Sk20]. Если, паче чаяния, ее адрес изменится, ее можно будет найти с помощью поисковых систем (возможно, через домашнюю страницу автора). Там же в заданиях по курсам имеются ссылки на видео, иллюстрирующие материалы книги.

0.5. Для специалистов

В § 9 приводится набросок простого доказательства теоремы Штифеля 9.1.3 о параллелизуемости ориентируемых трехмерных многообразий. Оно получено из обычно приводимого в книгах отбрасыванием обозначений и терминов, не нужных для него, но нужных для чего-то другого. Оно проще и доказательства из [Ki89], см. п. 9.2. В § 9, 12, 13 приводится набросок простого доказательства теорем об алгебрах с делением и о невложимости проективных пространств. В § 10, 11 приведены красивые важные задачи по основам теории гомологий, которые могут быть использованы на семинарах по этой теме.

По возможности приводятся ссылки на книги и обзоры, а не на оригинальные статьи.

Стандартная терминология теории препятствий не используется там, где (по мнению автора) она неудобна для начинающего. Приведем здесь сравнение обычной терминологии и принятой в книге. *Расстановки элементов группы G на i-симплексах триангуляции T* — то же самое, что *i-мерные цепи на T с коэффициентами G*. Группа таких расстановок обычно обозначается $C_i(T;G)$. Множество $\partial^{-1}(0)$ всех циклов образует подгруппу группы $C_i(K;G)$, обозначаемую $Z_i(T;G)$. Множество $\partial C_{i+1}(T;G)$ всех границ образует подгруппу группы $C_i(K;G)$, обозначаемую $B_i(T;G)$. Когда $G=\mathbb{Z}_2$, мы пропускаем коэффициенты в обозначениях цепей, циклов, границ и гомологий.

В этой книге препятствия лежат в группах *гомологий*, а не в группах *когомологий* (изоморфных группам гомологий для многообразий). Обозначения для характеристических классов используются для классов, двойственных им по Пуанкаре. Эта точка зрения (двойственная принятой в учебниках, но обычная для первооткрывателей) позволяет *наглядно изображать* препятствия.

0.6. Благодарности

Выражаю благодарность А. Н. Дранишникову, Д. Б. Фуксу, А. Т. Фоменко и Е. В. Щепину: я учился алгебраической топологии по книге [FF89] и на семинаре Дранишникова—Щепина в Математическом институте Российской академии наук.

Настоящая книга основана на занятиях, проведенных мной на мехмате Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, в Независимом московском университете, на ФОПФ и ФИВТ Московского физико-технического института, в Летней школе «Современная математика», а также в Кировской и Петербургской летних математических школах в 1994—2019 гг.

Благодарю С. Я. Аввакумова, П. М. Ахметьева, Т. В. Березина, А. И. Бикеева, Ю. М. Бурмана, М. Н. Вялого, А. А. Заславского, С. К. Ландо, С. В. Матвеева, С. А. Оленчука, С. С. Подкорытова, В. В. Прасолова, Н. А. Приходько, М. Б. Скопенкова, А. Б. Сосинского, М. Танцера, В. В. Успенского, Б. Р. Френкина и В. В. Шувалова за полезные обсуждения, способствовавшие улучшению изложения. Благодарю Д. С. Кроо, С. А. Оленчука, В. В. Прасолова и В. В. Шувалова за возможность использовать подготовленные ими компьютерные версии рисунков. Благодарю всех участников занятий лекций за замечания и за предоставление решений некоторых задач.

Эта книга посвящена памяти Юрия Петровича Соловьёва — замечательного математика, считавшего важным изложение математики на

конкретном, доступном (и в то же время строгом) языке, в отличие от «птичьего» языка излишней абстракции.

Грантовая поддержка. Автор поддержан РФФИ, гранты номер 15-01-06302 и 19-01-00169, и грантами фонда Саймонса 2015—2020 годов.

Интернет-страница автора: `https://users.mccme.ru/skopenko/`.

0.7. Обозначения и соглашения

Если вектор обозначен одной буквой (а не указанием его начала и конца), то мы не пишем над ним знак вектора и не выделяем его жирным. Вот другие основные обозначения:

- $|X|$ — число элементов в множестве X;
- pr_k — проекция на k-й сомножитель декартова произведения;
- ρ_2 — приведение по модулю два;
- $\mathbb{Z}_{(i)}$ — группа $\mathbb{Z}$ для четного i и $\mathbb{Z}_2$ для нечетного i;
- fx или $f(x)$ — образ элемента x при отображении f;
- $\simeq$ — гомотопность отображений (п. 3.7);
- $\cong$ — гомеоморфность подмножеств пространства $\mathbb{R}^m$ (п. 3.1), диффеоморфность многообразий (п. 4.5), кусочно линейная гомеоморфность гиперграфов (п. 5.1), изоморфизм групп;
- $\sim$ — гомотопическая эквивалентность пространств (п. 14.4).

Номера задач обозначаются жирным шрифтом. Если условие задачи является формулировкой утверждения, то в задаче требуется это утверждение доказать. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой *. Если некоторая задача не получается, то читайте дальше — следующие задачи могут оказаться подсказками.