В. С. Шипачев

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ПОЛНЫЙ КУРС

УЧЕБНИК ДЛЯ БАКАЛАВРОВ

4–е издание, исправленное и дополненное

Под редакцией академика **А. Н. Тихонова**

Рекомендовано Научно–методическим советом Министерства образования и науки Российской Федерации в качестве учебника для студентов вузов

Книга доступна в электронной библиотечной системе biblio-online.ru

Москва ▪ Юрайт ▪ 2014

УДК 51
ББК 22.1я73
Ш63

***Автор*:**

Шипачев Виктор Семенович — кандидат физико-математических наук, до 1995 г. — старший научный сотрудник кафедры вычислительной математики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

***Рецензенты*:**

Костомаров Д. П. — заведующий кафедрой автоматизации научных исследований факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, член-корреспондент Российской академии наук, профессор;

Бутузов В. Ф. — заведующий кафедрой математики физического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, доктор физико-математических наук, профессор.

Шипачев, В. С.

Ш63 Высшая математика. Полный курс : учебник для бакалавров / В. С. Шипачев ; под ред. А. Н. Тихонова. — 4-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2014. — 607 с. — Серия : Бакалавр. Базовый курс.

ISBN 978-5-9916-3325-3

В учебнике излагается материал по важным разделам высшей математики, таким как сведения из теории множеств и теории вещественного числа, теория пределов последовательностей и функций, основы дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких переменных, элементы аналитической геометрии на плоскости и в пространстве, некоторые вопросы линейной и векторной алгебры, теории рядов и теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Существенное внимание уделено решению типовых примеров и задач теоретического и прикладного характера.

Соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования третьего поколения.

Предназначен для студентов различных специальностей университетов и технических вузов.

УДК 51
ББК 22.1я73

© Шипачев В. С., 2007
© Шипачев В. С., 2012, с изменениями
© ООО «Издательство Юрайт», 2014

ISBN 978-5-9916-3325-3

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий «Курс высшей математики» является расширенным изложением лекций, которые автор читал студентам геологического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова. Учебник может быть использован студентами факультетов нематематического профиля, на которых различные разделы высшей математики объединены в один курс.

Автор стремился изложить материал по возможности полно, строго и доступно и ставил своей целью не просто сообщить читателю те или иные сведения по высшей математике, а развить у него математическое мышление, расширить кругозор и привить ему математическую культуру; показать внутреннюю связь математических понятий, т. е. представить математику в ее развитии.

Учебник содержит краткие сведения из теории множеств, теорию пределов, элементы аналитической геометрии на плоскости и в пространстве, основы дифференциального и интегрального исчислений функций одной и многих переменных, понятия о матрицах, об определителях, о рядах и теорию дифференциальных уравнений.

Основу курса составляет математический анализ, включающий в себя дифференциальное и интегральное исчисления, о которых упоминалось выше. В нем изучается важнейшее понятие высшей математики — понятие функции. С ним читатель уже знаком из курса элементарной математики. Однако полное и систематическое изучение проводится именно в высшей

математике. Учитывая современные тенденции в преподавании математики, понятие функции определяется через понятие множества.

Опыт показал, что для многих начинающих значительную трудность представляет решение задач. Поэтому в учебнике главное внимание уделено решению типовых примеров и задач. Однако прежде чем начать их решать, надо сначала изучить нужный раздел высшей математики и добиться полной ясности в понимании соответствующих понятий и теорем. Для практических занятий следует использовать учебное пособие автора «Задачник по высшей математике».

Автор выражает глубокую благодарность академику А.Н. Тихонову за ценные советы и большую помощь; академику РАН В.А. Садовничему, членам-корреспондентам РАН А.В. Бицадзе, Л.Д. Кудрявцеву и Д.П. Костомарову; профессорам А.Г. Свешникову, Ш.А. Алимову и В.Ф. Бутузову за просмотр рукописи и сделанные ими весьма полезные замечания.

Автор

Ни одно человеческое исследование не может называться истинной наукой, если оно не прошло через математические доказательства.

*Леонардо да Винчи**

ВВЕДЕНИЕ

Математика — самая древняя и в то же время самая юная из наук. Она стала складываться где-то во втором тысячелетии до н. э., когда потребности торговли, землемерия и мореплавания заставили упорядочить приемы счета и измерения, начало которых уходит еще в более глубокую древность. Уже строители египетских пирамид владели математическими знаниями.

В Древней Греции начиная с VI в. до н. э. математика приобретает статус самостоятельной науки, окончательное оформление которой было осуществлено в III в. Евклидом в его бессмертных «Началах». По этой книге или по ее более доступным изложениям изучали геометрию в течение более двух тысяч лет. Отсюда видно, что математика значительно отличается от всех других наук. Теоретические представления Аристотеля в области физики сейчас кажутся несколько наивными, они стали достоянием истории науки, хотя в свое время в них были обобщены все имевшиеся знания об окружающем мире. Теорема же Пифагора действительна и поныне и составляет одну из основ геометрии.

Раз сложившись в качестве науки, математика не переставала развиваться, разрабатывать новые методы, открывать новые области, совершенствовать свою символику, свой научный аппарат. Возникновение физики нового времени было связано с непосредственным применением математики Кеплером и Галилеем для изучения небесных и земных явлений. Великий поворот-

---

* Леонардо да Винчи. Избранные естественнонаучные произведения. М.: Изд-во АН СССР, 1955.

ный пункт в истории математики наступил в XVII в., когда Декарт создал аналитическую геометрию, а Ньютон и Лейбниц — дифференциальное интегральное исчисление. Эти открытия в огромной степени увеличили возможности математики как для ее собственного развития, так и для содействия успехам других наук, таких, как физика и астрономия.

Бурное развитие математики, последовавшее за этими открытиями, привело на рубеже XIX—XX вв. к новой революции, связанной, в частности, с признанием правомерности неевклидовых геометрий (Лобачевского, Римана, Бойяи) и созданием теории множеств Кантором. С тех пор математика продолжает развиваться, поражая воображение многообразием своих специальных областей, новизной и необычностью используемых представлений и понятий, неожиданным своеобразием своих методов, особенностями своего языка. Процесс дифференциации наук охватил и математику, приведя к возникновению внутри нее множества отраслей.

Одновременно с развитием методов и отраслей математики происходило и ее внедрение в другие науки, шел процесс так называемой математизации науки. В результате логики развития самой науки математика превратилась в метод научного исследования. Если в период классической физики математика служила преимущественно средством обработки экспериментальных данных, установления точного количественного отношения между открытыми физическими явлениями и процессами, то уже к концу XIX в. математические вычисления стали предварять физические гипотезы и открытия. Математика не только обрабатывала показания приборов и результаты экспериментов, но она стала идти впереди них, создавая такие математические модели, реальный физический смысл которых, еще не вполне ясный, предстояло открыть.

Именно это явление нередко получало неправильное истолкование, отчасти со стороны самих ученых, но особенно со стороны идеалистических философов, и было зафиксировано в известном афоризме «материя исчезла, остались одни уравнения».

Суть процесса, о котором идет речь, состоит в том, что физик, пользуясь математическими методами, может проникать в еще не исследованные области физического мира, пока недоступные физическим методам, открывать в них математические закономерности, создавать математические модели неизвестных еще физических процессов и тем самым толкать и направлять мысль экспериментатора. В наше время физик-теоретик — это прежде всего математик. «Математика для физика, — говорит крупный американский ученый Ф. Дж. Дайсон, — это не только инструмент, с помощью которого он может количественно описать любое явление, но и главный источник представлений и принципов, на основе которых зарождаются новые теории» *.

Выразительным примером роли математического мышления для физических открытий может служить общая теория относительности Эйнштейна. Вся теория была завершена до экспериментальной проверки, а когда такая проверка была произведена, ее результаты практически совпали с предсказанными теорией.

Не менее убедительный пример дает история возникновения квантовой механики, которая была первоначально построена чисто математическим путем, конечно, на основе некоторых известных, но не объясненных в то время физических данных, в результате гениального, но чисто «умозрительного скачка математического воображения» (Ф. Дайсон). Она не только была немедленно подтверждена соответствующими экспериментами, но явилась источником и стимулом дальнейшего развития физики микромира со всеми ее впечатляющими результатами, роль которых в XX в. слишком хорошо известна, чтобы о ней стоило говорить снова.

У всех, кто изучал историю математики и ее применения в науках о природе и в технике и размышлял об отношении математики к объективному миру, будь это сами математики, физики или философы, неизбежно возникал вопрос о чудесной способности математики давать правильное описание или отображение физических процессов, поведения физической вселенной.

---

* Дайсон Ф. Дж. Математика в физических науках.— В кн.: Математика в современном мире. М., 1967. С. 112.

Ученые, стоявшие у колыбели современной науки, такие, как Кеплер и Галилей, пораженные достигнутыми ими результатами, считали, что книга природы написана ее божественным творцом на языке математики, так что ученому остается только прочитать эти записи. С тех пор высказывалось множество предположений о природе математики и ее познавательной способности, но ни одно из них не получило всеобщего признания.

В XX в. одним из западных философов Витгенштейном была высказана поразительная мысль, что вся математика есть не что иное, как совокупность тавтологий, а математические доказательства представляют собой тавтологические преобразования. Эта теория объясняла абсолютную достоверность математики и ее универсальную применимость. Но она была бессильна объяснить способность математики открывать новое в мире, т. е. ту ее способность, которая является важнейшей для развития науки и дает возможность все более широкого применения математики в специальных науках.

Следует подчеркнуть, что математика оперирует не только абстракциями (это делают все науки), но абстракциями весьма высокой степени. Даже любое из самых обычных натуральных чисел, например 4, есть абстракция, отвлекающаяся от всех специфических особенностей каких-либо четырех предметов (деревьев, ножек стола, углов дома и т. д.), характеризуя лишь класс, имеющий 4 члена. Понятие же натурального числа — это абстракция еще более высокая, поскольку оно представляет собой класс всех классов, имеющих не менее одного члена.

Сила математики именно в ее способности создавать все более высокие абстракции, оперировать ими и изучать их особенности и закономерности. Именно поэтому она может применяться к различным другим наукам и помимо физики, по мере того как они сами становятся теоретическими, т. е. начинают создавать достаточно высокие абстракции и пользоваться ими.

Немецкий философ XVIII в. Иммануил Кант считал, что наука тем более заслуживает названия науки, чем больше в ней математики. В то время математика была неотъемлемым элементом лишь механики, физики и астрономии. В наше время науки настолько повысили свой теоретический уровень, а математика настолько разно-

образила и усовершенствовала свои методы, что их слияние оказалось не только возможным, но и абсолютно необходимым как для развития этих наук, так и для самой математики.

Естественно, что процесс математизации не в одинаковой степени затронул все науки. Огромным успехом является применение математических методов, помимо наук о неживой природе, также к исследованиям в области биологии. Это оказалось возможным главным образом благодаря проникновению биологии во внутриклеточные процессы и анализу их на молекулярном уровне. В качестве примера здесь можно назвать хотя бы исследование функционирования и построение моделей некоторых функций нейрона и изучение проблем наследственности и расшифровки генетического кода.

Но роль математики в биологии этим не исчерпывается. Как говорит Э. Мур, «особая ценность математики для биологии состоит не в применении ее как аппарата исследований, а в возможности абстрактно подойти к решению фундаментальных проблем и обнаружить связи между принципиально различными явлениями и процессами»*.

В общественных науках, которые больше всего были изолированы от математики, если не считать применения статистических методов к исследованию некоторых социальных процессов и явлений, можно назвать такие весьма различные области, как проблемы демографии и проблемы структурной лингвистики, где применение математики дало превосходные результаты. Но, пожалуй, наиболее значительным научным достижением было внедрение математических методов в экономическую науку и в руководство экономическими процессами. В наше время научное управление этими процессами может быть осуществлено только на основе применения точных экономических методов ко всем сторонам и сферам народного хозяйства — от прогнозирования размещения полезных ископаемых до изучения спроса на товары широкого потребления и бытовые услуги, от изучения потребности в рабочей силе до плани-

* Мур Э. Математика в биологических исследованиях // Математика в современном мире. М., 1967. С. 129.

рования транспортных артерий, пассажирских перевозок и экспериментов по искусственному воздействию на атмосферные явления.

Короче говоря, жизнь современного человека невозможна без математики.

О какой, однако, математике идет здесь речь: о так называемой «чистой» или прикладной? Но это традиционное разграничение в настоящее время становится все более и более условным и утрачивает свой первоначальный смысл. Даже наиболее абстрактные отделы «чистой» математики могут, оказывается, получить конкретное приложение в самых неожиданных областях науки и техники. В то же время потребности в решении теоретических и практических проблем стимулируют разработку новых абстрактных методов и отраслей математической науки.

В наше время в связи с возросшей ролью математики в современной науке и технике будущие экономисты, биологи, геологи, социологи и т. д. нуждаются в серьезной математической подготовке. Этим определяется место математики в системе высшего образования. Современный научный работник или инженер должен не только знать основы математики, но и хорошо владеть всеми новейшими математическими методами исследования, которые могут применяться в области его деятельности. Смежные науки используют различный объем математических знаний и ставят новые задачи в изучении самой математики. Можно с уверенностью сказать, что изучение математики способствует усвоению самого современного стиля научного мышления и является условием его применения в конкретных науках.

Часть I
АНАЛИЗ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Глава I. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

§ 1. Множества. Обозначения

Понятие множества является одним из основных в математике. Это понятие принадлежит к числу так называемых первичных, неопределяемых через более простые. Слова: «совокупность», «семейство», «система», «набор», «объединение» и т. п. — являются синонимами слова «множество». Примерами множеств могут служить множество студентов данного университета; совокупность тех из них, кто сдал вступительные экзамены без троек; семейство звезд Большой Медведицы; набор трех уравнений с тремя неизвестными; множество всех целых чисел и т. д. Из приведенных примеров следует, что множество может содержать конечное и бесконечное число объектов произвольной природы.

Объекты, из которых состоит множество, называются его *элементами*, или *точками*. Множества чаще всего обозначаются большими, а их элементы — малыми буквами. Если x — элемент множества X, то пишут $x \in X$ (x принадлежит X). Если x не является элементом множества X, то пишут $x \notin X$ (x не принадлежит X). Если $x_1, \ldots, x_n$ — некоторые элементы, то запись $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ означает, что множество X состоит из элементов $x_1, \ldots, x_n$. Аналогичный смысл имеет запись $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$.

Пусть X и Y — два множества. Если X и Y состоят из одних и тех же элементов, то говорят, что они совпадают, и пишут $X = Y$. Если в X нет элементов, не принадлежащих Y, то говорят, что X содержится в Y или что X есть *подмножество* множества Y. В этом случае пишут $X \subset Y$ или $Y \supset X$ (X содержится в Y или Y содержит X).

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* множеством и обозначается символом $\varnothing$.

Пустое множество является подмножеством любого множества.

Множество с установленным порядком расположения элементов называют упорядоченным. Упорядоченное множество в отличие от просто множества записывают внутри круглых скобок. Например, из двух элементов x_1 и x_2 можно составить два упорядоченных множества: $(x_1; x_2)$ и $(x_2; x_1)$.

В дальнейшем нам придется иметь дело с различными множествами вещественных чисел *. Всюду, где это не может привести к недоразумению, для краткости вещественные числа будем называть просто числами.

Пусть X — множество, а $P(x)$ — какое-то свойство. Тогда запись $\{x|P(x)\}$ обозначает совокупность тех элементов множества X, которые обладают свойством $P(x)$. Например, $\{x|x^2-3x+2=0\}$ есть совокупность вещественных корней уравнения $x^2-3x+2=0$, т. е. это множество из двух элементов: 1 и 2; $\{x|3<x<7\}$ есть множество всех чисел, удовлетворяющих неравенствам $3<x<7$; $\{x|x>7$ и $x<3\}=\varnothing$, т. е. пустое множество.

Пусть a и b — два числа и $a<b$. Тогда пользуются следующими обозначениями:

$$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}=[a, b];\ \{x|a<x\leqslant b\}=(a, b];$$

$$\{x|a\leqslant x<b\}=[a, b);$$

$$\{x|a<x<b\}=(a, b);\ \{x|a\leqslant x\}=[a, +\infty);$$

$$\{x|a<x\}=(a, +\infty);$$

$$\{x|x\leqslant b\}=(-\infty, b];\ \{x|x<b\}=(-\infty, b);$$

$$\{x|-\infty<x+\infty\}=(-\infty, +\infty).$$

Все эти множества называются *промежутками*, причем $[a, b]$ называется *отрезком* (или *сегментом*), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, +\infty)$ и $(-\infty, b]$ — *полуинтервалами*, а (a, b), $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$ и $(-\infty, +\infty)$ — *интервалами*. Промежутки $[a, b]$ $(a, b]$, $[a, b)$ и (a, b) называются *конечными*, a и b называются их концами. Остальные промежутки называются *бесконечными*.

---

* Вместо термина *вещественные числа* часто употребляют термин *действительные числа*.

Множество $(-\infty, +\infty)$ всех чисел называется также *числовой прямой**, или *числовой осью*, а любое число — *точкой* этой прямой. Пусть a — произвольная точка прямой и δ — положительное число. Тогда любой интервал $(a-\delta, a+\delta)$ называется δ-окрестностью точки a.

Если $x_1, \ldots, x_n$ — произвольные числа, то запись $x=\max\{x_1, \ldots, x_n\}$ $(x=\min\{x_1, \ldots, x_n\})$ означает, что число x максимальное (минимальное) из чисел $x_1, \ldots, x_n$.

§ 2. Вещественные числа и их основные свойства

Напомним, что множество вещественных чисел разбивается на два множества — *рациональные* и *иррациональные* числа. Любое вещественное число представляется бесконечной десятичной дробью. *Рациональным* числом называется число, которое можно представить в виде p/q, где p и q — целые числа, причем $q \neq 0$. *Иррациональным* числом называется всякое вещественное число, которое не является рациональным. Как известно, всякое рациональное число p/q является либо целым, либо представляется конечной или периодической бесконечной десятичной дробью. Иррациональное же число представляется непериодической бесконечной десятичной дробью. Например, рациональные числа 3/4 и 1/3 представляются следующими десятичными дробями: $3/4=0{,}75$; $1/3=0{,}333\ldots$; иррациональные числа $\sqrt{2}$ и π представляются непериодическими бесконечными десятичными дробями: $\sqrt{2}=1{,}41421356\ldots$, $\pi=3{,}14159\ldots$.

Перечислим основные свойства вещественных чисел.

I. Сложение и умножение вещественных чисел. Для любой пары a и b вещественных чисел определены, и притом единственным образом, два вещественные числа $a+b$ и $a \cdot b$, называемые их *суммой* и *произведением*, обладающие следующими свойствами. Каковы бы ни были числа a, b и c:

1) $a+b=b+a$ (переместительное свойство);
2) $a+(b+c)=(a+b)+c$ (сочетательное свойство);
3) $a \cdot b=b \cdot a$ (переместительное свойство);
4) $a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c$ (сочетательное свойство);
5) $(a+b) \cdot c=ac+bc$ (распределительное свойство);
6) существует единственное число 0 такое, что $a+0=a$ для любого числа a;

* **Числовой прямой называется прямая, на которой выбраны точка,** являющаяся началом отсчета, масштабный отрезок и положительное направление.

7) для любого числа a существует такое число $-a$, что $a+(-a)=0$;
8) существует единственное число $1\neq 0$ такое, что для любого числа a имеет место равенство $a\cdot 1=a$;
9) для любого числа $a\neq 0$ существует такое число a^{-1}, что $a\cdot a^{-1}=1$, число a^{-1} обозначается также символом $\frac{1}{a}$.

II. Неравенства между вещественными числами. Для любых двух различных вещественных чисел a и b установлено одно из отношений $a>b$ или $b>a$ (a больше b или b больше a).

Отношение $>$ обладает следующими свойствами. Каковы бы ни были числа a, b и c:
1) если $a>b$ и $b>c$, то $a>c$;
2) если $a>b$, то $a+c>b+c$;
3) если $a>0$ и $b>0$, то $a\cdot b>0$.

Вместо $a>b$ пишут также $b<a$ (b меньше a). Запись $a\geqslant b$ (или, что то же, $b\leqslant a$) означает, что либо $a=b$, либо $a>b$. Соотношения $a<b$, $a\leqslant b$, $a>b$, $a\geqslant b$ называются *неравенствами*. Неравенства $a<b$ и $a>b$ называются *строгими неравенствами*.

III. Непрерывность вещественных чисел. Вещественные числа обладают свойством *непрерывности*.

Пусть X и Y — два множества, состоящие из вещественных чисел. Тогда, если для любых чисел $x\in X$ и $y\in Y$ выполняется неравенство $x\leqslant y$, то существует хотя бы одно число c такое, что для любых чисел x и y выполняются неравенства $x\leqslant c\leqslant y$.

Свойство непрерывности имеет простой геометрический смысл. В самом деле, если возьмем числовую прямую, то на ней каждая точка $x\in X$ будет расположена левее каждой точки $y\in Y$. Поэтому множество X расположено целиком левее множества Y. Согласно свойству непрерывности между множествами X и Y есть точка c, «отделяющая одно множество от другого» (рис. 1). При этом точка c может принадлежать как

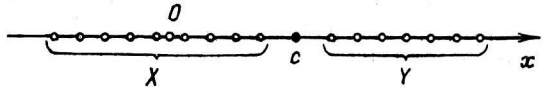

Рис. 1

множеству X, так и множеству Y, а также не принадлежать ни одному из них. Таким образом, числовая прямая является как бы сплошной линией без «дырок». В каком бы месте мы ни разрезали прямую на две части, разрез пройдет через одну из точек прямой.

Следует заметить, что свойством непрерывности обладает множество всех вещественных чисел, но им не обладает множество только рациональных чисел. Действительно, пусть множество X состоит из рациональных чисел x, для которых выполняется неравенство $x<\sqrt{2}$, а множество Y состоит из рациональных чисел y, для которых выполняется неравенство $y>\sqrt{2}$. Тогда, очевидно, для любого $x\in X$ и любого $y\in Y$ выполняется неравенство $x\leqslant y$, однако не существует рационального числа c такого, чтобы выполнялись неравенства $x\leqslant c\leqslant y$. В самом деле, таким числом могло бы быть только $\sqrt{2}$, которое, как известно, не является рациональным.

Перечисленные свойства вещественных чисел можно принять за аксиомы.

Мы ограничились здесь перечислением наиболее характерных свойств вещественных чисел, считая, что этих сведений достаточно для изучения последующего материала *.

§ 3. Грани числовых множеств

Говорят, что множество X ограничено сверху (снизу), если существует число c такое, что для любого $x\in X$ выполнено $x\leqslant c$ ($c\leqslant x$). Число c в этом случае называется *верхней* (*нижней*) гранью множества X.

Множество, ограниченное и сверху и снизу, называется *ограниченным*.

Примеры. Любой конечный промежуток ($[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b)) ограничен. Интервал $(a, +\infty)$ есть множество, ограниченное снизу, но не ограниченное сверху; а интервал $(-\infty, +\infty)$ есть множество, не ограниченное ни сверху, ни снизу.

Очевидно, что любое ограниченное сверху (снизу) множество X имеет бесконечно много верхних (нижних) граней, образующих множество чисел, ограничивающих X сверху (снизу). В самом деле, если число c является

* Желающим ознакомиться с теорией вещественных чисел более полно рекомендуем книгу: Кудрявцев Л. Д. «Курс математического анализа». М., 2006. Т. 1.

верхней (нижней) гранью множества X, то любое число c', большее (меньшее) числа c, также является верхней (нижней) гранью множества X, так как из справедливости неравенства $x \leqslant c$ $(c \leqslant x)$ будет следовать, что $x \leqslant c'$ $(c' \leqslant x)$.

Естественно, возникает вопрос о существовании наименьшего из чисел ограниченного сверху множества и наибольшего из чисел ограниченного снизу множества.

Наименьшее из чисел, ограничивающих множество X сверху, называется *точной верхней гранью** множества X и обозначается символом $\sup X$**, а наибольшее из чисел, ограничивающих множество X снизу, называется точной нижней гранью этого множества и обозначается символом $\inf X$***.

Примеры. Пусть $X=(a, b)$. Тогда b является точной верхней гранью множества X, а a — точной нижней гранью, т. е. $b=\sup X$, $a=\inf X$. Пусть $X=(a, +\infty)$. Тогда $a=\inf X$, а точной верхней грани данное множество не имеет.

Точная верхняя грань $\sup X$ обладает следующим важным свойством. Как бы мало ни было число $\varepsilon>0$, найдется число $x \in X$ такое, что $x>\sup X-\varepsilon$. Если бы такого числа x не нашлось, то число $\sup X-\varepsilon$ было бы также верхней гранью, и тогда число $\sup X$ не было бы точной верхней гранью. Другими словами, данное свойство выражает тот факт, что число $\sup X$ является наименьшим среди чисел, ограничивающих множество X сверху, и уменьшено быть не может.

Аналогичным свойством обладает и точная нижняя грань — как бы мало ни было число $\varepsilon>0$, найдется число $x \in X$ такое, что $x<\inf X+\varepsilon$.

Возникает вопрос, при каких условиях числовое множество имеет точную верхнюю (нижнюю) грань. Ответ дает следующая весьма важная

Теорема 1.1. *Любое непустое ограниченное сверху (снизу) числовое множество имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.*

Доказательство. Пусть X — непустое множество, ограниченное сверху. Тогда множество Y чисел, ог-

---

* Наряду с термином *точная верхняя грань* (*точная нижняя грань*) употребляют термины *верхняя грань* (*нижняя грань*).

** supremum (*лат.*) — наивысшее.

*** infimum (*лат.*) — наинизшее.

раничивающих X сверху, непусто. Из определения верхней грани следует, что для любого $x \in X$ и любого $y \in Y$ имеет место неравенство $x \leqslant y$. В силу свойства непрерывности существует такое число c, что для любых x и y выполняются неравенства

$$x \leqslant c \leqslant y. \tag{1}$$

Из первого из неравенств (1) следует, что число c ограничивает множество X сверху, т. е. является верхней гранью, а из второго — что оно — наименьшее из таких чисел,* т. е. является точной верхней гранью, причем может как принадлежать, так и не принадлежать множеству X.

Случай существования точной нижней грани у непустого ограниченного снизу множества рассматривается аналогично**■

Если множество X не ограничено сверху (снизу), условимся писать: $\sup X = +\infty$ $(\inf X = -\infty)$.

§ 4. Абсолютная величина числа

Понятием абсолютной величины числа и неравенствами, связанными с абсолютными величинами, нам в дальнейшем придется очень часто пользоваться.

Определение. Абсолютной величиной, или модулем, числа x называется само число x, если $x \geqslant 0$, или число $-x$, если $x < 0$.

Абсолютная величина числа x обозначается символом $|x|$. Таким образом:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Из определения вытекает ряд свойств абсолютной величины числа.

$|x| \geqslant 0$. Действительно:

1) если $x \geqslant 0$, то $|x| = x \geqslant 0$;

2) если $x < 0$, то $|x| = -x$; но $-x > 0$, так как $x < 0$, т. е. $|x| > 0$.

Из 1) и 2) получаем, что $|x| \geqslant 0$.

---

* Так как $c \leqslant y$ для всех $y \in Y$.

** Здесь и в дальнейшем символ ■ будет означать конец доказательства.

II. $|x|=|-x|$. Действительно:

1) если $x\geqslant 0$, то $-x\leqslant 0$, и тогда $|-x|=-(-x)=x=|x|$;

2) если $x<0$, то $-x>0$, и тогда $|-x|=-x=|x|$, так как $x<0$.

Из 1) и 2) получаем: $|x|=|-x|$.

III. $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$. Действительно:

1) если $x\geqslant 0$, то $|x|=x$ и подавно $|x|\geqslant -x$, т. е. $-|x|\leqslant x$;

2) если $x<0$, то $x<-x$, так как $2x<0$, $x+x<0$, $x<-x$, т. е. $x<|x|$.

Из 1) и 2) получаем, что $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$.

Следующие три свойства в силу важности докажем в виде теорем.

Теорема 1.2. *Пусть ε — положительное число. Тогда неравенства $|x|\leqslant\varepsilon$ и $-\varepsilon\leqslant x\leqslant\varepsilon$ равносильны.*

Доказательство. Пусть $|x|\leqslant\varepsilon$. Тогда:

1) если $x\geqslant 0$, то $|x|=x$, т. е. $x\leqslant\varepsilon$, откуда $0\leqslant x\leqslant\varepsilon$;

2) если $x<0$, то $|x|=-x$, т. е. $-x\leqslant\varepsilon$, откуда $-\varepsilon\leqslant x\leqslant 0$.

Объединяя 1) и 2), при любом x получаем: $-\varepsilon\leqslant x\leqslant\varepsilon$.

Пусть справедливо неравенство $-\varepsilon\leqslant x\leqslant\varepsilon$. Это значит, что одновременно выполняются неравенства $x\leqslant\varepsilon$ и $x\geqslant-\varepsilon$. Из последнего имеем: $-x\leqslant\varepsilon$. Так как по определению $|x|$ есть либо x, либо $-x$, то $|x|\leqslant\varepsilon$ ■

Теорема 1.3. *Абсолютная величина суммы двух чисел не больше суммы абсолютных величин этих чисел, т. е. $|x+y|\leqslant|x|+|y|$.*

Доказательство. Пусть x и y — любые числа. В силу свойства III для них справедливы неравенства

$$-|x|\leqslant x\leqslant|x| \text{ и } -|y|\leqslant y\leqslant|y|.$$

Складывая их почленно, получим

$$-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant(|x|+|y|).$$

По теореме 1.2 это двойное неравенство равносильно неравенству $|x+y|\leqslant|x|+|y|$ ■

Заметим, что $|x-y|\leqslant|x|+|y|$.

Теорема 1.4. *Абсолютная величина разности двух чисел не меньше разности абсолютных величин этих чисел, т. е. $|x-y|\geqslant|x|-|y|$.*

Доказательство. Для любых чисел x и y имеем

$$x=y+(x-y).$$

По теореме 1.3 справедливо неравенство

$$|x| = |y + (x - y)| \leqslant |y| + |x - y|.$$

Отсюда получаем: $|x - y| \geqslant |x| - |y|$ ■

И в заключение отметим, что каковы бы ни были два числа x и y, имеют место легко проверяемые соотношения:

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \text{и} \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad \text{если } y \neq 0.$$

Глава II. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

Понятие предела является фундаментальным понятием математического анализа. Начало изучению понятия предела положено в элементарной математике, где с помощью предельных переходов определяется длина окружности, объем цилиндра, конуса и т. д. Оно также использовано при определении суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Операция предельного перехода является одной из основных операций анализа. В настоящей главе рассматривается простейшая форма операции предельного перехода, основанная на понятии предела так называемой числовой последовательности. Понятие предела числовой последовательности позволит нам в дальнейшем определить и другие более сложные формы операции предельного перехода.

§ 1. Числовые последовательности

1. Числовые последовательности и арифметические действия над ними. С числовыми последовательностями мы уже встречались в средней школе. Примерами таких последовательностей могут служить: 1) последовательность всех элементов арифметической и геометрической прогрессии, 2) последовательность периметров правильных n-угольников, вписанных в данную окружность, 3) последовательность $x_1 = 1$, $x_2 = 1{,}4$, $x_3 = 1{,}41$ ... приближенных значений $\sqrt{2}$. В этом пункте мы уточним и расширим понятие числовой последовательности.

Определение. Пусть каждому числу n натурального ряда чисел

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

ставится в соответствие вещественное число x_n, т. е. заданы некоторые вещественные числа, определенным образом перенумерованные. Тогда множество занумерованных вещественных чисел

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots \qquad (1)$$

называется *числовой последовательностью*, или просто *последовательностью*.

Другими словами, числовую последовательность можно определить как множество пар чисел $(n;\ x_n)$.

Числа x_n будем называть *элементами*, или *членами*, последовательности (1), а число x_n — *общим*, или *n-м*, *членом* данной последовательности. Сокращенно последовательность (1) будем обозначать символом $\{x_n\}$. Так, например, символ $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ будет обозначать последовательность $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots$

Последовательность считается заданной, если указан способ получения любого ее элемента. Например, если $x_n=1+(-1)^n$, то последовательность запишется в виде: 0, 2, 0, 2, ... Обращая дробь $\frac{1}{3}$ в десятичную с точностью до одного, двух, трех и т. д. знаков после запятой, также получаем последовательность:

$$x_1=0{,}3;\ x_2=0{,}33;\ x_3=0{,}333,\ \ldots\ ;\ x_n=0{,}333\ldots3,\ \ldots$$

Необходимо заметить, что последовательность отличается от числового множества тем, что мы можем одновременно определить как сам элемент последовательности, так и его порядковый номер.

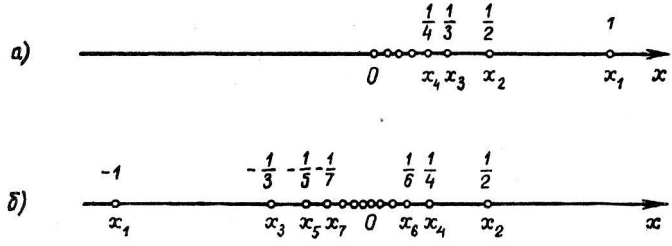

Рис. 2