Л. А. Бессонов

Теоретические основы электротехники

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

УЧЕБНИК ДЛЯ БАКАЛАВРОВ

12–е издание, исправленное и дополненное

Допущено Министерством образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки дипломированных специалистов «Электротехника, электромеханика и электротехнологии», «Электроэнергетика», «Приборостроение»

Москва ▪ Юрайт ▪ 2014

УДК 621.3.013(078.5)
ББК 31.21я73
Б53

Автор:

Бессонов Лев Алексеевич — доктор технических наук, профессор, с 1955 по 2000 г. заведовал кафедрой «Теоретические основы электротехники» Московского государственного института радиотехники, электроники и автоматики (технический университет).

Рецензенты:

Миронов В. Г. — доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ;

Бутырин П. А. — доктор технических наук, профессор, член-корреспондент Российской академии наук.

Бессонов, Л. А.

Б53 Теоретические основы электротехники. Электрические цепи : учебник для бакалавров / Л. А. Бессонов. — 12-е изд., исправ. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2014. — 701 с. — Серия : Бакалавр. Углубленный курс.

ISBN 978-5-9916-3210-2

Рассмотрены традиционные и новые вопросы теории линейных и нелинейных электрических цепей. К традиционным относятся методы расчета токов и напряжений при постоянных, синусоидальных, импульсных и других видах воздействий, теория двух- и четырехполюсников, электрические фильтры, электрические и магнитные линии с распределенными параметрами, расчет переходных процессов классическим, операторным методами, методом интеграла Дюамеля, обобщенных функций, методом пространства состояний, преобразования Фурье, аналоговый и цифровой сигналы, основы теории сигналов, цифровые фильтры, имитированные элементы и их применение, преобразование Брутона, преобразование Гильберта, установившиеся и переходные процессы в нелинейных электрических цепях, устойчивость различных видов движений, субгармонические колебания.

К числу новых вопросов, включенных в курс, относятся физические причины, условия возникновения и каналы действия нелинейной, неявно выраженной обратной связи в нелинейных электрических цепях переменного тока, приводящие к возникновению в них колебаний, получивших название «странные аттракторы», метод расчета установившегося режима работы обобщенной цепи переменного тока с учетом высших гармоник, использующий принцип диакоптики, макрометод расчета переходных процессов в мостовой выпрямительной схеме с предвключенным сопротивлением в цепи переменного тока, магнитотранзисторный генератор напряжения типа меандра, основные положения вейвлет-преобразования сигналов, новый подход к составлению уравнений для приращений при исследовании устойчивости периодических процессов в нелинейных цепях с источником синусоидальной ЭДС, позволяющей простым путем свести уравнение для приращений к уравнению Матье, и ряд других новых вопросов.

По всем вопросам курса даны примеры с подробными решениями. В конце каждой главы — вопросы и задачи для самопроверки. Соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования третьего поколения.

Для студентов и преподавателей высших учебных заведений, инженеров, аспирантов и научных работников электротехнических и близких к ним специальностей.

УДК 621.3.013(078.5)
ББК 31.21я73

ISBN 978-5-9916-3210-2

ПРЕДИСЛОВИЕ

Двенадцатое исправленное и дополненное издание учебника по курсу «Теоретические основы электротехники» Л. А. Бессонова образуют два тома. Первый том — «Электрические цепи», второй — «Электромагнитное поле». Курс ТОЭ является базовым курсом, на который опираются многие профилирующие дисциплины высших технических учебных заведений.

Учебник соответствует программе курса ТОЭ, утвержденной Министерством образования и науки Российской Федерации. В него включены самые последние разработки по теории цепей и по теории электромагнитного поля.

В учебник «Электрические цепи» кроме *традиционных вопросов теории электрических цепей* — свойств цепей, их топологии, методов расчета токов и напряжений при постоянных, синусоидальных, периодических несинусоидальных, многофазных, импульсных воздействиях, теории двухполюсников, четырехполюсников и многополюсников, резонансных явлений, частотных характеристик, цепей со взаимоиндукцией, теории графов, электрических фильтров *k*, *m* и *RC*-типа, линий с распределенными параметрами, различных методов расчета переходных процессов (классического, операторного, интеграла Дюамеля по мгновенным значениям величин и по огибающим, метода пространства состояний, метода обобщенных функций), частотных преобразований цепей, преобразований Фурье, цепей с переменными во времени параметрами, включены следующие новые вопросы: свойства нелинейных цепей постоянного и переменного тока и методы их расчета в установившихся и переходных процессах работы, вопросы устойчивости автоколебаний и периодических процессов под воздействием периодических вынуждающих сил, субгармонические колебания, фазовая плоскость, случайные процессы.

В книге рассмотрены также основы теории сигналов, аналоговый, цифровой и аналитический сигналы, преобразования Фурье цифровых сигналов, дискретная свертка, цифровые фильтры, обобщенные формулы для расчета переходных процессов в линиях с распределенными параметрами при произвольных сопротивлениях генератора и нагрузки и многократных отражениях, магнитные линии с распределенными параметрами, имитированные элементы электрических цепей и их применение, преобразование Гильберта, преобразование Брутона, основы устойчивости сложных типов движений, электромоделирование, переходные процессы в цепях с управляемыми источниками напряжения и тока с учетом их нелинейных и частотных свойств, в цепях с термисторами, в электромеханических системах, передаточные функции активных RC-фильтров и методика их расчета.

Кроме перечисленных выше в настоящем, двенадцатом издании рассмотрены следующие новые вопросы, отсутствовавшие во всех предыдущих изданиях учебника: работа часто встречающихся на практике мостовых выпрямительных схем с элементами RL и RC в цепи выпрямленного тока, анализ работы магнитотранзисторного генератора прямоугольного напряжения в виде меандра, теория линейного активного автономного четырехполюсника применена к расчету нелинейных цепей с двумя нелинейными элементами в двух удаленных друг от друга ветвях схемы; объяснено, почему в нелинейных электрических цепях переменного тока возможно возникновение большого числа различных типов движений; для цепи с двумя разнохарактерными нелинейностями выведены формулы для определения условий перехода от предыдущих типов движений к последующим. Рассмотрены физические причины, условия возникновения и каналы действия внутренней нелинейной, неявно выраженной обратной связи, приводящей к автомодуляции и хаосу (к странным аттракторам) в нелинейных электрических цепях переменного тока.

Причины возникновения этих явлений и каналы действия внутренней нелинейной обратной связи пояснены на конкретных схемах. Странные аттракторы в нелинейных цепях переменного тока сопоставлены с автоколебаниями в нелинейных цепях с источниками постоянной ЭДС, показано, в чем между ними есть сходство и в чем различие, рассмотрен математический критерий Фейгенбаума возникновения хаоса в нелинейных недиссипативных системах, конвергентные и неконвергентные электрические цепи, дуальные нелинейные цепи. Предложен макрометод расчета переходных процессов в мостовой выпрямительной схеме с предвключенным сопротивлением в цепи переменного тока. Изложен аналитический метод расчета нелинейных цепей переменного тока, позволяющий, используя принцип диакоптики, проводить расчет токов и напряжений в обобщенной цепи с учетом высших гармоник. В раздел синтеза цепей включен синтез четырехполюсников по передаточной функции с помощью схем с операционным усилителем в цепи обратной связи. Раздел теории сигналов дополнен основными положениями вейвлет-преобразования сигналов. Раздел исследования устойчивости различных видов движений дополнен методом исследования устойчивости периодических процессов в линейных электрических цепях с переменными во времени параметрами, находящихся под воздействием синусоидальной ЭДС, основанным на сведении уравнений для приращений к уравнению Матье. Предложен и иллюстрирован примером новый подход к составлению уравнений для приращений при исследовании устойчивости периодических процессов в нелинейных цепях с источником синусоидальной ЭДС, позволяющий учесть влияние на устойчивость четных гармоник и простым и удобным путем привести уравнение для приращений к уравнению Матье. Рассмотрен метод исследования устойчивости работы рекурсивных цифровых фильтров.

Как и в предыдущих изданиях, весь материал учебника разделен на обязательный для изучения студентами всех специальностей, в учебном плане которых имеется курс ТОЭ или родственный курс с несколько иным названием (этот материал является ядром курса и набран нормальным шрифтом), и на специальный, или дополнительный, который в неодинаковой степени необходим студентам различных специальностей (выделен петитом). Какую часть специального материала рекомендуется изучить студенту, зависит от специфики института, факультета и кафедры.

Известно, что теория усваивается легче и прочнее, когда она по ходу изложения сопровождается решением задач на рассматриваемые темы. Исходя из этого, во всех главах и приложениях автор приводит решения с пояснениями достаточно полных комплектов задач по всем основным вопросам всех глав и приложений. Кроме того, в конце каждой главы приведены вопросы и задачи для самопроверки.

После изучения данного курса студенты должны:

знать

— как традиционные, так и новые вопросы теории линейных и нелинейных цепей;

— основы теории сигналов;

— работу мостовых выпрямительных схем с элементами *RL* и *RC* в цепи выпрямленного тока;

— синтез электрических цепей;

— теорию линейного активного автономного четырехполюсника;

— разновидности магнитных цепей и построение их вебер-амперных характеристик;

— принципы работы биполярного и полевого транзисторов;

— характеристику направленных и ненаправленных графов;

— дискретные сигналы;

— частотные преобразования и преобразования цифровых сигналов;

уметь

— принимать условия для определения характеристик электрических и магнитных цепей;

— использовать методы анализа и расчета для различных процессов в целях постоянного и переменного итога и построения схем электрических цепей;

владеть

— навыками решения задач по всем основным темам теории электрических цепей.

Выражаю благодарность официальному рецензенту книги доктору технических наук, профессору Московского энергетического института (государственный университет) В. Г. Миронову за обстоятельную рецензию и полезные замечания, способствовавшие улучшению книги. Благодарю моих товарищей по работе в Московском государственном институте радиотехники, электроники и автоматики (технический университет) кандидата технических наук, доцента А. В. Штыкова и доцента С. Э. Расовскую за помощь в подготовке книги к изданию и за высказанные ими замечания по рукописи, учтенные мной.

Автор

Глава первая

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

§ 1.1. Электромагнитное поле как вид материи. Под *электромагнитным полем* понимают вид материи, характеризующийся совокупностью взаимосвязанных и взаимообусловливающих друг друга электрического и магнитного полей. Электромагнитное поле может существовать при отсутствии другого вида материи — вещества, характеризуется непрерывным распределением в пространстве (электромагнитная волна в вакууме) и может проявлять дискретную структуру (фотоны). В вакууме поле распространяется со скоростью света, полю присущи характерные для него электрические и магнитные свойства, доступные наблюдению.

Электромагнитное поле оказывает силовое воздействие на электрические заряды. Силовое воздействие положено в основу определения двух векторных величин, описывающих поле: напряженности электрического поля $\vec{E}$ (В / м) и индукции магнитного поля $\vec{B}$ (Тл = В$\cdot$с/м^2). На заряд q (Кл), движущийся со скоростью $\vec{v}$ в электрическом поле напряженности $\vec{E}$ и магнитном поле индукции $\vec{B}$, действует сила Лоренца $\vec{F} = q\,\vec{E} + q\,[\vec{v}\,\vec{B}]$.

Электромагнитное поле обладает энергией, массой и количеством движения, т.е. такими же атрибутами, что и вещество. Энергия в единице объема, занятого полем в вакууме, равна сумме энергий электрической и магнитной компонент поля и равна $W_{\text{эм}} = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \dfrac{B^2}{2\mu_0}$, здесь $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{4\pi\cdot 9\cdot 10^9}$ — электрическая постоянная, Ф / м; $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ — магнитная постоянная, Гн / м. Масса электромагнитного поля в единице объема равна частному от деления энергии поля $W_{\text{эм}}$ на квадрат скорости распространения электромагнитной волны в вакууме, равной скорости света. Несмотря на малое значение массы поля по сравнению с массой вещества, наличие массы поля указывает на то, что процессы в поле являются процессами инерционными. Количество движения единицы объема электромагнитного поля определяется произведением массы единицы объема поля на скорость распространения электромагнитной волны в вакууме.

Электрическое и магнитное поля могут быть изменяющимися и неизменными во времени. Неизменным в макроскопическом смысле электрическим полем является электростатическое поле, созданное совокупностью зарядов, неподвижных в пространстве и неизменных во времени. В этом случае существует электрическое поле, а магнитное отсутствует. При протекании постоянных токов по проводящим телам внутри и вне их существуют электрическое и магнитное поля, не влияющие друг на друга, поэтому их можно рассматривать раздельно. В изменяющемся во времени поле электрическое и магнитное поля, как упоминалось, взаимосвязаны и обусловливают друг друга, поэтому их нельзя рассматривать раздельно.

§ 1.2. Интегральные и дифференциальные соотношения между основными величинами, характеризующими поле. Электромагнитные поля могут быть описаны интегральными или дифференциальными соотношениями. Интегральные соотношения относятся к объему (длине, площади) участка поля конечных размеров, а дифференциальные — к участку поля физически бесконечно малых размеров. Они выражаются операциями градиента, дивергенции, ротора (раскрытие операции grad, div и rot в различных системах координат см. во втором томе книги). В макроскопической теории поля описывают свойства поля, усредненные по бесконечно малому физическому объему и во времени. Этот объем, в отличие от математически бесконечно малого объема, может содержать большое число атомов вещества. Дифференциальные уравнения макроскопической теории поля не описывают поля внутри атомов, для чего, как известно, служат уравнения квантовой теории поля.

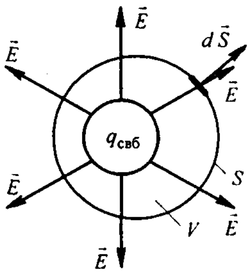

Рис. 1.1

В электростатическом поле поток вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$ через замкнутую поверхность (рис. 1.1) равен свободному заряду $q_{свб}$, находящемуся внутри этой поверхности, деленному на $\varepsilon_0 \varepsilon_r$ (теорема Гаусса):

$$\oint \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{q_{свб}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}, \tag{1.1}$$

где $d\vec{S}$ — элемент поверхности, направленный в сторону внешней нормали к объему; ε_r — относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика.

В дифференциальной форме теорему Гаусса записывают так:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_{свб}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}, \tag{1.2}$$

($\rho_{свб}$ — объемная плотность свободного заряда, Кл / м^3).

Переход от (1.1) к (1.2) осуществляют делением обеих частей (1.1) на объем V, находящийся внутри поверхности S, и стремлением объема V к нулю.

Физически $\operatorname{div} \vec{E}$ означает исток вектора в данной точке.

В электростатическом и стационарном электрическом полях на заряд q действует сила $\vec{F} = q\vec{E}$. Отсюда следует, что $\vec{E}$ может быть определена как силовая характеристика поля $\vec{E} = \lim_{q \to 0} \vec{F}/q$. Если q под действием сил поля переместится из точки *1* в точку *2* (рис. 1.2), то силы поля совершат работу $A = q\int_1^2 \vec{E}\, d\vec{l}$, где $d\vec{l}$ — элемент пути из *1* в *2*.

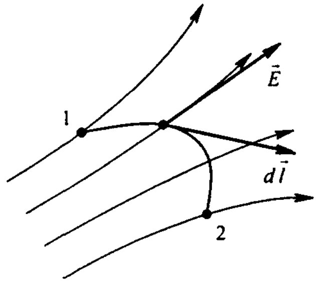

Рис. 1.2

Под *разностью потенциалов* U_{12} между точками *1* и *2* понимают работу, совершаемую силами поля при переносе заряда $q = 1$ Кл из точки *1* в точку *2*,

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}\, d\vec{l}; \qquad (1.3)$$

U_{12} не зависит от того, по какому пути происходило перемещение из точки *1* в точку *2*. Выражению (1.3) соответствует дифференциальное соотношение

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi. \qquad (1.4)$$

Градиент φ $(\mathrm{grad}\,\varphi)$ в некоторой точке поля определяет скорость изменения φ в этой точке, взятую в направлении наибольшего его возрастания. Знак минус означает, что $\vec{E}$ и $\mathrm{grad}\,\varphi$ направлены противоположно.

Электрическое поле называют *потенциальным*, если для него $\oint \vec{E}\, d\vec{l} = 0$. Электрическое поле поляризованного диэлектрика описывается вектором электрического смещения (индукции)

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \qquad (1.5)$$

где $\vec{P}$ — поляризованность диэлектрика, равная электрическому моменту единицы объема поляризованного диэлектрика.

В стационарном неизменном во времени электрическом поле в проводящей среде в смежные моменты времени распределение зарядов одинаково, поэтому для этого поля справедливо определение разности потенциалов по формуле

$$U_{12} = \int_1^2 \vec{E}\, d\vec{l}.$$

Внутри источника постоянной ЭДС результирующая напряженность электрического поля $\vec{E}_{\text{рез}}$ равна векторной сумме потенциальной (кулоновой) составляющей $\vec{E}_{\text{пот}}$ и сторонней составляющей $\vec{E}_{\text{стор}}$:

$$\vec{E}_{\text{рез}} = \vec{E}_{\text{пот}} + \vec{E}_{\text{стор}};$$

$\vec{E}_{\text{стор}}$ разделяет заряды внутри источника; она обусловлена химическими, электрохимическими, тепловыми и другими процессами неэлектростатического происхождения и направлена встречно $\vec{E}_{пот}$. Внутри источника ЭДС при $e(t)$, являющейся функцией времени, напряженность электрического поля имеет две составляющие: $\vec{E}_{стор}$ и $\vec{E}_{пот}$, но $\vec{E}_{стор}$, разделяющая заряды внутри источника, обусловлена электромагнитными процессами, а не перечисленными выше. В электромагнитном поле могут протекать электрические токи. Под *электрическом током* понимают направленное (упорядоченное) движение электрических зарядов. Ток в некоторой точке поля характеризуется плотностью $\bar{\delta}$ (А/м^2). Известны три вида тока: ток проводимости (плотностью $\bar{\delta}_{пр}$), ток смещения (плотностью $\bar{\delta}_{см}$) и ток переноса (плотностью $\bar{\delta}_{пер}$). Ток проводимости протекает в проводящих телах под действием электрического поля, плотность его пропорциональна $\bar{E}$:

$$\bar{\delta}_{пр} = \gamma \vec{E}, \tag{1.6}$$

где γ — удельная проводимость проводящего тела, $Ом^{-1} \cdot м^{-1}$. В металлах ток проводимости представляет собой упорядоченное движение свободных электронов, в жидкостях — движение ионов.

Плотность тока смещения в диэлектрике равна производной по времени от вектора электрического смещения $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$.

$$\bar{\delta}_{см} = \frac{d\vec{D}}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} + \frac{d\vec{P}}{dt} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{d\vec{E}}{dt}. \tag{1.7}$$

Слагаемое $\varepsilon_0 \dfrac{d\vec{E}}{dt}$ — составляющая тока смещения, обусловленная изменением во времени напряженности поля $\vec{E}$ в вакууме. Под вакуумом*) в курсе ТОЭ будем понимать не просто сверхразреженную среду, не пустоту, где ничего нет, а мировую материальную среду с особыми свой-

---

*) Из чего состоят вакуум и электрические заряды, создающие в нем ток смещения, какие в вакууме и в самих зарядах происходят физические процессы и по каким законам — достоверно пока неизвестно.

Изучение процессов в вакууме в настоящее время проводится по нескольким направлениям. Наиболее известны два из них. Первое направление исследования (первая гипотеза) основывается на квантовой теории и на теории относительности [Физическая энциклопедия. Т. 5. 1998. С. 317; БСЭ. 3-е изд. Т. 27. С. 337]. Второе направление исследований [*Ацюковский В.А.* Общая эфиродинамика. М.: Энергоатомиздат. 1990] основывается на предположении о том, что процессы в микромире вакуума подчиняются всем известным в настоящее время законам макромира газовой динамики реального вязкого сжимаемого газа и что ограничение скорости различных физических процессов в физическом вакууме величиной скорости света $3 \cdot 10^8$ м/с справедливо только для электромагнитных процессов и не справедливо для гравитационных.

Согласно первому направлению исследования под вакуумным состоянием понимают состояние поля, в котором оно вовсе не имеет частиц (квантов), когда его энергия, оставаясь огромной, минимальна. В этом состоянии электромагнитные и другие виды полей испытывают флюктуации, при которых в вакууме рождаются электронно-позитронные пары.

Эти пары ведут себя как связанные заряды и под действием электрического поля смещаются, подобно тому как смещаются связанные заряды в диэлектрике. Процесс смещения электронно-позитронных пар под действием электрического поля называют *поляризацией* вакуума.

ствами. В течение многих столетий эту среду называли эфиром, а в последние десятилетия ее стали именовать физическим вакуумом, самим названием подчеркивая, что она обладает физическими свойствами. Слагаемое $d\bar{P}/dt$ обусловлено изменением поляризованности во времени (изменением расположения связанных зарядов в диэлектрике при изменении $\bar{E}$ во времени). В качестве примера тока смещения может быть назван ток через конденсатор. Ток переноса вызывается движением электрических зарядов в свободном пространстве. Примером тока переноса может служить ток в электронной лампе. Если положительный заряд объемной плотности ρ_+ движется со скоростью $\vec{v}_+$ и отрицательный заряд объемной плотности ρ_- со скоростью $\vec{v}_-$, то плотность тока переноса в этом поле $\bar{\delta}_{пер} = \rho_+\vec{v}_+ + \rho_-\vec{v}_-$ в явном виде не зависит от напряженности $\bar{E}$ в данной точке поля. Если в некоторой точке поля одновременно существовали бы все три вида тока, то полная плотность тока $\bar{\delta}_{пол} = \bar{\delta}_{пр} + \bar{\delta}_{см} + \bar{\delta}_{пер}$. Для большинства задач ток переноса отсутствует.

Ток — это скаляр алгебраического характера. Полный ток через поверхность S равен

$$I_{пол} = \int_S \bar{\delta}_{пол}\, d\bar{S}. \qquad (1.8)$$

Если в электромагнитном поле выделить некоторый объем, то ток, вошедший в объем, будет равняться току, вышедшему из объема, т. е.

$$\oint \bar{\delta}_{пол}\, d\bar{S} = 0, \qquad (1.9)$$

где $d\bar{S}$ — элемент поверхности объема, он направлен в сторону внешней по отношению к объему нормали к поверхности. Последнее уравнение выражает *принцип непрерывности полного тока*: линии полного тока представляют замкнутые линии, не имеющие ни начала, ни конца. Элек-

---

Вторым основным процессом в вакууме является испускание фотона свободным электроном (позитроном) с последующим его поглощением другим или тем же электроном за очень короткое время Δt, равное, примерно, 10^{-21} с. За это время заряды перемещаются на расстояние Δx. Процесс называют *виртуальным*, а сами заряды — *виртуальными*.

Для каждой пары виртуальных частиц выполняется закон сохранения заряда, но в рамках соотношения неопределенностей наблюдаются местные нарушения закона сохранения энергии и закона сохранения импульса. Эти нарушения состоят в том, что каждая виртуальная частица во время ее существования обладает разбросом энергии $\Delta W \geq h/\Delta t$ и разбросом импульса $\Delta m \geq h/\Delta x$, где постоянная Планка $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

Согласно второму направлению исследования вакуума: в нем образуются тороидальные вихри уплотненного эфира, обладающие огромной кольцевой и тороидальной скоростью. Эти вихри и являются электрическим зарядами. Тороидальная составляющая винтового движения создает магнитное поле, кольцевая — электрическое. Знак заряда зависит от того, является ли вихревое движение по отношению к кольцевому лево- или правовинтовым. Фотон — это двухрядная цепочка линейных (не кольцевых) вихрей, в которой вихри одного ряда вращаются в одну сторону, а другого ряда — в противоположную. Во втором направлении исследования установлено, что плотность физического вакуума численно равна величине электрической постоянной $\varepsilon_0 = 8{,}86 \cdot 10^{-12}$ кг/м^3 (Фарад/м в системе МКСА — эквивалент кг/м^3 в системе МКС).

Носителями тока электрического смещения в физическом вакууме согласно первому направлению исследования вакуума являются электронно-позитронные пары, согласно второму — свободные электрические заряды (электроны и протоны).

трические токи неразрывно связаны с магнитным полем. Эта связь в неферромагнитной среде определяется интегральной формой закона полного тока

$$\oint \vec{H}\, d\vec{l} = \oint \frac{\vec{B}}{\mu_0} d\vec{l} = I_{\text{пол}}; \tag{1.10}$$

циркуляция вектора напряженности магнитного поля $\vec{H}$ (А/м) по замкнутому контуру равна полному току $I_{\text{пол}}$, охваченному этим контуром; dl — элемент длины контура (рис. 1.3). Таким образом, все виды токов, хотя и имеют различную физическую природу, обладают свойством создавать магнитное поле. В неферромагнитной среде магнитная индукция

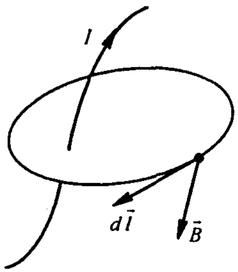

Рис. 1.3

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}. \tag{1.11}$$

Ферромагнитные вещества обладают спонтанной намагниченностью. Характеристикой ее является магнитный момент единицы объема вещества $\vec{J}$ (его называют намагниченностью). Для ферромагнитных веществ

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}) = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu_a \vec{H}, \tag{1.12}$$

где μ_r, μ_a — относительная и абсолютная магнитная проницаемость, соответственно.

Напряженность магнитного поля в ферромагнитной среде

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \tag{1.13}$$

равна разности двух векторных величин: $\vec{B}/\mu_0$ и $\vec{J}$.

Закон полного тока в интегральной форме для любой среды принято записывать в виде

$$\oint \vec{H}\, d\vec{l} = I_{\text{пол}} \tag{1.14}$$

или в дифференциальной форме

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \gamma \vec{E} + \frac{d\vec{D}}{dt}. \tag{1.15}$$

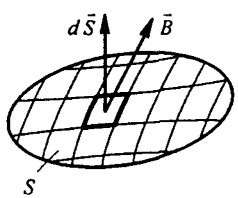

Рис. 1.4

Запись (1.15) закона полного тока получили из (1.14), поделив обе части его на площадь $\Delta\vec{S}$, охваченную контуром интегрирования, устремив ΔS к нулю и учтя плотность тока смещения $\frac{d\vec{D}}{dt}$. Физически ротор (rot) характеризует поле в данной точке в отношении способности к образованию вихрей.

Плотность тока переноса в правой части последнего уравнения не учтена, так как он обычно отсутствует в задачах, решаемых с помощью этого уравнения. Магнитный поток через некоторую поверхность S (рис. 1.4) определяют как поток вектора $\vec{B}$ через эту поверхность:

$$\Phi = \int_S \vec{B}\, d\vec{S}. \tag{1.16}$$

Поток Φ — это скаляр алгебраического характера, измеряется в веберах (Вб = В·с). Если поверхность S замкнутая и охватывает объем V, то поток, вошедший в объем, равен потоку, вышедшему из него, т. е.

$$\oint \vec{B}\, d\vec{S} = 0. \tag{1.17}$$

Это уравнение выражает принцип *непрерывности магнитного потока.* Линии магнитной индукции — это замкнутые линии.

В 1831 г. М. Фарадей сформулировал *закон электромагнитной индукции*: ЭДС $e_{\text{инд}}$, наведенная в некотором одновитковом контуре изменяющимся во времени магнитным потоком, пронизывающим этот контур, определяется выражением

$$e_{\text{инд}} = \oint \vec{E}_{\text{инд}}\, d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}, \tag{1.18}$$

где $\vec{E}_{\text{инд}}$ — индукционная составляющая напряженности электрического поля. Знак минус обусловлен правой системой отсчета: принято, что положительное направление отсчета для ЭДС и направление потока при его возрастании связаны правилом правого винта (рис. 1.5).

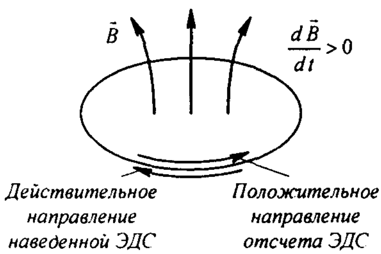

Рис. 1.5

Если контур многовитковый (катушка с числом витков w), то

$$e_{\text{инд}} = -\frac{d\Psi}{dt}. \tag{1.19}$$

Здесь Ψ — потокосцепление катушки, равное сумме потоков, пронизывающих отдельные витки катушки,

$$\Psi = \Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_w. \tag{1.20}$$

Если все витки w пронизываются одинаковыми потоками Φ, то

$$\Psi = w\Phi,$$

где Ψ — результирующее потокосцепление, оно может создаваться не только внешним по отношению к данному контуру потоком, но и собственным потоком, пронизывающим контур, при протекании по нему тока. В проводнике длиной $d\vec{l}$, пересекающем магнитные силовые ли-

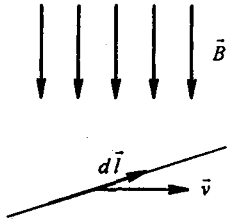

Рис. 1.6

нии неизменного во времени магнитного поля индукции $\vec{B}$ (рис. 1.6), вследствие силы Лоренца наводится ЭДС

$$de_{\text{инд}} = \vec{B}[d\vec{l}\,\vec{v}], \qquad (1.21)$$

где $\vec{v}$ — скорость перемещения проводника относительно магнитного поля. В (1.21) $\vec{B}$ скалярно умножается на векторное произведение $d\vec{l}$ и $\vec{v}$. Если в результате расчета по (1.21) $de_{\text{инд}} > 0$, то $de_{\text{инд}}$ направлена по $d\vec{l}$.

В 1833 г. русский академик Э.Х. Ленц установил закон электромагнитной инерции. При всяком изменении магнитного потока, сцепляющегося с каким-либо проводящим контуром, в нем возникает индуктированная ЭДС, стремящаяся вызвать в контуре ток, который:

1) препятствует изменению потокосцепления контура;

2) вызывает механическую силу, препятствующую изменению линейных размеров контура или его повороту.

Закон электромагнитной индукции, примененный к контуру бесконечно малых размеров, записывают так:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad (1.22)$$

(в последней формуле индукционную составляющую напряженности поля $\vec{E}_{\text{инд}}$ принято обозначать $\vec{E}$). Обобщая, можно сказать, что электромагнитное поле описывают четырьмя основными уравнениями в интегральной форме:

$$\oint\vec{H}\,d\vec{l} = I_{\text{пол}}; \qquad e_{\text{инд}} = \oint\vec{E}_{\text{инд}}\,d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt};$$
$$\oint\vec{B}\,d\vec{S} = 0, \qquad \oint\vec{E}\,d\vec{S} = \frac{q_{\text{свб}}}{\varepsilon_0\,\varepsilon_r}. \qquad (1.23)$$

Этим уравнениям отвечают четыре уравнения в дифференциальной форме:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \gamma\,\vec{E} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}; \qquad (1.24)$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}; \qquad (1.25)$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0; \qquad (1.26)$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho_{\text{свб}}}{\varepsilon_0\,\varepsilon_r}. \qquad (1.27)$$

Они сформулированы в 1873 г. Дж. Максвеллом в его «Трактате об электричестве и магнетизме». Их называют *уравнениями Максвелла* или *уравнениями макроскопической электродинамики.*

Уравнение (1.24) означает, что вихревое магнитное поле создается токами проводимости и токами смещения. Уравнение (1.25) свидетельствует о том, что изменение магнитного поля во времени вызывает вихревое электрическое поле. Уравнение (1.26) — что магнитная индукция в неферромагнитной среде не имеет истоков и уравнение (1.27) — что истоком линий $\bar{E}$ являются свободные заряды. Частные производные в уравнениях (1.24) и (1.25) учитывают, что уравнения записаны для неподвижных тел и сред в выбранной системе координат.

Джеймс Максвелл обобщил и дополнил работы предшествующих ученых А. Ампера, М. Фарадея, Д. Генри, Э. Ленца, Г. Гельмгольца, ввел понятие об электрическом смещении в диэлектрике, о токе смещения в диэлектрике и создал систему уравнений (1.24)–(1.27), с помощью которых могут быть исследованы процессы в изменяющихся во времени электромагнитных полях и электрических цепях.

§ 1.3. Подразделение электротехнических задач на цепные и полевые. Задачи, с которыми приходится встречаться на практике, могут быть подразделены на две большие группы. Первая группа — цепные задачи. Они могут быть решены с помощью уравнений поля в интегральной форме. В этой группе используются понятия «ток», «магнитный поток», «электрическое» и «магнитное напряжение», «потенциал», «ЭДС», «МДС» (магнитодвижущая сила), «резистивное», «индуктивное» и «емкостное сопротивление». Для решения задач второй группы — полевых задач — применяют уравнения поля в дифференциальной и интегральной формах. Цепные задачи рассматривают в I томе учебника ТОЭ (курса теории цепей), задачи теории поля — во II томе учебника ТОЭ. Четкой границы между двумя группами задач нет, так как любая цепная задача с увеличением частоты перерастает в полевую (все более проявляются малые (паразитные) параметры и резко возрастает излучение энергии в окружающее пространство).

Основными уравнениями теории электрических цепей являются уравнения (законы) Кирхгофа. Первый закон Кирхгофа для электрических цепей следует из принципа непрерывности полного тока, а для магнитных цепей — из принципа непрерывности магнитного потока.

Покажем, что уравнение второго закона Кирхгофа для цепи переменного тока вытекает из основных уравнений электромагнитного поля. С этой целью обратимся к рис. 1.7. Цепь образована источником сторонней ЭДС $e(t)$, являющейся функцией времени (область *1* с проводимостью γ_1), проводящей средой (область *2* с проводимостью γ_2) и конденсатором (область *3*, электрическая проницаемость ε_a).

В источнике ЭДС за счет работы механической силы при вращении ротора электрического генератора возникает сторонняя ЭДС $e(t)$. Она создает внутри источника стороннюю напряженность электрического поля $\bar{E}_{стор}$, непрерывно разделяющую электрические заряды внутри источни-

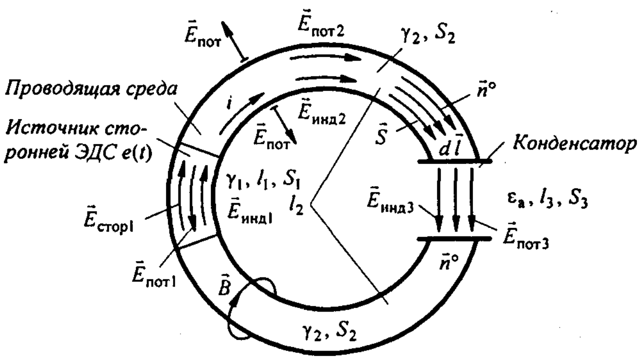

Рис. 1.7

ка, так что на одном зажиме источника в некоторый момент времени создается плюс заряд, а на другом зажиме в тот же момент времени такой же по величине минус заряд. Эти заряды создают в цепи потенциальное электрическое поле с напряженностью $\vec{E}_{\text{пот}}$ и изменяющийся во времени электрический ток i. Одновременно с разделением зарядов и протеканием тока по цепи возникает изменяющееся во времени магнитное поле индукции $\vec{B}$, охватывающее проводник и по закону электромагнитной индукции создающее в цепи и диэлектрике индукционную составляющую электрического поля $\vec{E}_{\text{инд}}$. Электрические заряды, перемещающиеся по проводнику, создают в диэлектрике, окружающем проводник, потенциальную составляющую напряженности электрического поля $\vec{E}_{\text{пот}} = -\operatorname{grad}\varphi$ (где φ — электрический потенциал), направленную перпендикулярно к поверхности проводника.

Будем исходить из непрерывности полного тока i через поперечные сечения трех областей. Полагаем, что излучение энергии в окружающее пространство отсутствует (частота относительно невелика). В первой области напряженность электрического поля $\vec{E}_1$ состоит из трех компонент (сторонней, потенциальной и индукционной): $\vec{E}_1 = \vec{E}_{\text{стор}1} + \vec{E}_{\text{пот}1} + \vec{E}_{\text{инд}1}$, во второй — $\vec{E}_2 = \vec{E}_{\text{пот}2} + \vec{E}_{\text{инд}2}$, в третьей — $\vec{E}_3 = \vec{E}_{\text{пот}3} + \vec{E}_{\text{инд}3}$; $\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3$ — площади поперечного сечения областей; $d\vec{l}$ — элемент длины, совпадающий по направлению с $d\vec{S}$; $\vec{n}^\circ$ — единичный вектор, совпадающий с направлением $d\vec{l}$ и $\vec{S}$.

Для первой области

$$i = \gamma_1 (\vec{E}_{\text{стор}1} + \vec{E}_{\text{пот}1} + \vec{E}_{\text{инд}1})\vec{S}_1; \tag{1.28}$$

для второй —

$$i = \gamma_2 (\vec{E}_{\text{пот}2} + \vec{E}_{\text{инд}2})\vec{S}_2; \tag{1.29}$$

для третьей —

$$i = \varepsilon_a \frac{d}{dt}(\vec{E}_{\text{пот}3} + \vec{E}_{\text{инд}3})\vec{S}_3 = \varepsilon_a p(\vec{E}_{\text{пот}3} + \vec{E}_{\text{инд}3})\vec{S}_3, \quad p = \frac{d}{dt}. \tag{1.30}$$

Бакалавр

ЮРАЙТ

Л. А. Бессонов

Теоретические основы электротехники

Электромагнитное поле

УЧЕБНИК ДЛЯ БАКАЛАВРОВ

11-е издание, переработанное и дополненное

Допущено Министерством образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов технических высших учебных заведений, обучающихся по направлениям «Электротехника», «Электротехнологии», «Электромеханика», «Электроэнергетика» и «Приборостроение»

Москва • Юрайт • 2014

УДК 621.3.013(078.5)
ББК 31.21я73
Б53

***Автор*:**

Бессонов Лев Алексеевич — доктор технических наук, профессор, с 1955 по 2000 г. — заведующий кафедрой «Теоретические основы электротехники» Московского государственного института радиотехники, электроники и автоматики (технический университет) (МИРЭА).

Бессонов, Л. А.

Б53 Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле : учебник для бакалавров / Л. А. Бессонов. — 11-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2014. — 317 с. — Серия : Бакалавр. Углубленный курс.

ISBN 978-5-9916-3176-1

Рассмотрены традиционные и появившиеся за последние годы новые вопросы теории и методы расчета физических процессов в электрических, магнитных и электромагнитных полях, предусмотренные программой курса ТОЭ.

К числу традиционных разделов курса относятся: постоянное во времени электрическое поле в диэлектрике и проводящих средах, постоянное во времени магнитное поле, переменное электромагнитное поле в диэлектрике, проводящей и полупроводящей средах, изучение электромагнитных волн, волны в направляющих системах, объемные резонаторы, моделирование полей, метод конформных преобразований, метод Грина, движение заряженных частиц в электромагнитных полях и др. К числу нетрадиционных разделов — основные положения магнитной гидродинамики, электродинамика движущихся сред, сверхпроводящие среды в электромагнитных полях, волны в гиротропных средах, метод интегральных уравнений, метод конечных элементов и др.

По всем главам даны примеры с подробными решениями. В конце каждой главы — вопросы и задачи для самопроверки.

Соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования третьего поколения.

Для студентов и преподавателей высших учебных заведений технического профиля.

УДК 621.3.013(078.5)
ББК 31.21я73

ISBN 978-5-9916-3176-1

ЧАСТЬ III

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс «Теоретические основы электротехники» (ТОЭ) является базовым для ряда профилирующих дисциплин многих высших учебных заведений. В полном объеме ТОЭ студенты изучают в течение трех семестров: первые два — теорию линейных и нелинейных электрических цепей, третий — теорию электромагнитного поля.

Теория электрических цепей и теория электромагнитного поля интенсивно развиваются. Соответственно совершенствуются и дополняются обе составные части этого единого курса.

Настоящая книга является одиннадцатым изданием учебника «Электромагнитное поле», содержание которого (как и одиннадцатого издания учебника «Электрические цепи» 2012 г., написанного тем же автором) полностью соответствует программе курса ТОЭ, утвержденной Министерством образования и науки Российской Федерации.

Курс «Электромагнитное поле» студенты начинают изучать после раздела «Электричество и магнетизм» курса физики и раздела «Уравнения математической физики» курса высшей математики. Поэтому элементы теории поля учащимся в определенной степени уже известны. В части III курса ТОЭ эти знания расширяются, дополняются и доводятся до уровня, достаточного для решения задач, с которыми придется столкнуться инженеру в своей практической деятельности.

В учебнике представлены как традиционные, так и нетрадиционные разделы. К числу традиционных относятся: постоянное электрическое поле в диэлектрике и проводящей среде, постоянное магнитное поле, переменное электромагнитное поле в диэлектрике, проводящей и полупроводящей средах, излучение электромагнитных волн, волны в направляющих системах, метод конформных преобразований, движение заряженных частиц в электромагнитном поле, метод Грина, расчет полей по методу сеток и др.

К числу нетрадиционных разделов могут быть отнесены: электромагнитное поле в гиротропной среде, основные положения магнитной гидродинамики, сверхпроводящие среды в электромагнитных полях, электродинамика движущихся сред, метод интегральных уравнений и др.

Кроме перечисленных, в одиннадцатое издание включены следующие вопросы: S- и T-параметры элементов высокочастотного тракта, уравнения Максвелла в симметричной форме и их применение, излучение из щели волновода, объемные резонаторы, метод конечных элементов, распространение радиоволн в реальных условиях, основные положения последней по времени гипотезы о процессах, происходящих в физическом вакууме — эфире, работа электретного микрофона на нагрузку, парение кольцевого магнита, высокотемпературная сверхпроводимость и др.

В каждой главе даны примеры расчетов полей с подробными пояснениями, а в конце приведены вопросы и задачи для самопроверки. Основным шрифтом в книге набран материал, обязательный для изучения студентами всех специальностей, в учебных планах которых есть курс электромагнитного поля или родственные ему курсы с несколько иным названием. Петитом набран материал, необходимость изучения которого определяется кафедрой соответствующего вуза. Учебник написан таким образом, что в процессе обучения возможна перестановка некоторых близких по тематике глав, если в каком-либо вузе сложилась традиция несколько иной последовательности изложения материала.

Нумерация глав и приложений в данном учебнике «Электромагнитное поле» и учебнике «Электрические цепи» единая.

Автор книги выражает благодарность заслуженным деятелям науки и техники РФ, докторам технических наук, профессорам В. Г. Герасимову и Т. А. Татур, а также кандидату технических наук, доценту А. В. Штыкову за полезные замечания по рукописи книги, способствовавшие ее улучшению.

ВВЕДЕНИЕ

Третья часть курса ТОЭ посвящена изучению теории электромагнитного поля, в которой рассмотрены физические явления и процессы, происходящие в электромагнитном поле, и методы их расчета. Эти явления и процессы лежат в основе действия большого числа различных электромагнитных и электронных приборов и устройств, широко применяемых на практике, а методы расчета физических явлений и процессов, рассмотренные в курсе Электромагнитного поля, используют при расчете и конструировании этих приборов и устройств. К числу таких приборов и устройств могут быть отнесены: электрические машины и аппараты, электроэнергетические установки для передачи электрической энергии, электромагнитные и электронные элементы автоматики, радиотехнические средства передачи информации, электромедицинские приборы и устройства, устройства электрометаллургии, электрохимии, геологоразведки, навигации, электротехнологические установки, установки контроля качества изделий электромагнитными методами, левитирующие транспортные средства, а также оборудование, предназначенное для исследований электромагнитных полей биологических объектов, искусственного интеллекта, высокотемпературной сверхпроводимости и многие и др.

В третьей части курса ТОЭ, как и в двух предыдущих, используют общие физические принципы, формирующие методологию мышления, такие как принцип симметрии, принцип минимума энергии, закон сохранения заряда, принцип непрерывности тока и магнитного потока. Поэтому можно сказать, что изучение теории электромагнитного поля не только расширяет физические представления о поле, дает возможность проектировать различные практические устройства, но и способствует формированию у студентов современного мировоззрения.

Под электромагнитным полем понимают вид материи, характеризующийся совокупностью взаимно связанных и взаимно обусловливающих электрического и магнитного полей. Электромагнитное поле обладает характерными для него электрическими и магнитными свойствами, доступными наблюдению. Силовое воздействие поля на электрические заряды и токи положено в основу определения основных векторных величин, которыми характеризуют поле: напряженности электрического поля $\vec{E}$ и индукции магнитного поля $\vec{B}$.

Значения $\vec{E}$ и $\vec{B}$ как взаимно связанных характеристик единого электромагнитного поля зависят от условий наблюдения этого поля. Они оказываются различными в неподвижной и в подвижной системах координат. Так, электрический заряд, движущийся в некоторой системе координат прямолинейно с постоянной скоростью, создает вокруг себя в этой системе и электрическое, и магнитное поле. Но наблюдатель, движущийся с той же скоростью и в том же направлении, обнаружил бы только электрическое поле, так как по отношению к нему заряд неподвижен.

Электромагнитное поле может самостоятельно существовать в виде электромагнитных волн в вакууме. Это свидетельствует о том, что поле, являясь формой материи, может существовать при отсутствии другой формы материи — вещества. Наряду с этим, электромагнитное поле обладает такими характеристиками, которые присущи веществу, а именно: энергией, массой и количеством движения.

Масса электромагнитного поля в единице объема определяется как частное от деления энергии поля в единице объема на квадрат скорости распространения электромагнитной волы в вакууме, равной скорости света. Количество движения электромагнитного поля, отнесенное к единице объема, равно произведению массы поля в единице объема на скорость распространения электромагнитной волны в вакууме.

При распространении электромагнитного поля одновременно с движением потока электромагнитной энергии происходит перемещение массы поля и количества движения.

Масса электромагнитного поля, заключенная в единице объема, несоизмеримо мала по сравнению с массой (плотностью) всех известных веществ. Даже при максимально достижимых в настоящее время значениях напряженностей электрического и магнитного полей масса поля в единице объема оказывается равной $10^{-12}\ldots10^{-17}$ кг/м^3. Тем не менее наличие массы поля имеет принципиальное значение, поскольку в этом отражена известная инерционность процессов в электромагнитном поле. В одних случаях электромагнитное поле распределено в пространстве непрерывно, в других обнаруживает дискретную структуру, проявляющуюся в виде квантов излученного поля. Электромагнитное поле может превращаться в вещество, а вещество — в поле. Так, электрон и позитрон превращаются в два кванта электромагнитного излучения, а при исчезновении фотона возникает пара: электрон и позитрон. Превращение поля в вещество, а вещества в поле соответствуют превращению одного вида материи в другой. Пространство и время являются формами существования электромагнитного поля.

В первой главе учебника говорилось, что электромагнитное поле для неподвижных тел и сред описывается четырьмя уравнениями Максвелла, сформулированными им в 1873 г. Они могут быть записаны в интегральной или в дифференциальной формах.

Интегральная форма — Дифференциальная форма

$$\left.\begin{aligned}
&\oint \vec{H}\,d\vec{l} = \int_S \vec{\delta}\,d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{D}\,d\vec{S}, && \operatorname{rot}\vec{H} = \vec{\delta} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},\\
&\oint \vec{E}\,d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}, && \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},\\
&\oint \vec{B}\,d\vec{S} = 0, && \operatorname{div}\vec{B} = 0,\\
&\oint \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{q_{\text{своб}}}{\varepsilon_0\,\varepsilon_r}; && \operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho_{\text{своб}}}{\varepsilon_0\,\varepsilon_r}.
\end{aligned}\right\}\quad (a)$$

К ним должны быть добавлены уравнения, характеризующие связь между векторами поля в материальной среде

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}, \qquad \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}, \qquad \vec{\delta} = \gamma \vec{E}. \tag{б}$$

В уравнениях (а) и (б) $\vec{\delta}$ — вектор плотности тока проводимости; $\vec{D}$ — вектор электрического смещения; Φ — магнитный поток; $d\vec{S}$ — элемент площади; $q_{своб}$ — свободный заряд; $\rho_{своб}$ — плотность свободного заряда; ε_0 и μ_0 — электрическая и магнитная постоянные; ε_r и μ_r — относительные электрическая и магнитная постоянные среды; γ — удельная проводимость среды.

Задачи, решаемые в теории электромагнитного поля, относятся к задачам математической физики, в которых основные векторы поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ рассматривают в общем случае как функции пространственных координат точки наблюдения и функции времени, на которые воздействуют операторы векторного анализа. Наряду с этим используется наглядное графическое описание полей с помощью картин силовых электрических и магнитных линий, густота которых соответствует абсолютному значению вектора поля и касательные к которым в каждой точке показывают направление этого вектора.

На практике встречают следующие виды полей: электростатическое поле, магнитостатическое поле, стационарное электрическое и стационарное магнитное поле (создаются постоянными токами), квазистационарное поле (в нем явления протекают медленно во времени), быстроизменяющиеся во времени поля в неподвижных телах и средах, движущихся в некоторой системе координат с относительно большой скоростью (в том числе соизмеримой со скоростью света).

В электростатическом поле $\partial / \partial t = 0$ и $\delta = 0$, поэтому

$$\oint \vec{E}\, d\vec{l} = 0 \qquad \text{или} \qquad \operatorname{rot} \vec{E} = 0,$$

$$\oint \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{q_{своб}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \qquad \text{или} \qquad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_{своб}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

$$\text{и} \qquad \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}.$$

В магнитостатическом поле $\partial / \partial t = 0$ и $\sigma = 0$, поэтому

$$\oint \vec{H}\, d\vec{l} = 0 \qquad \text{или} \qquad \operatorname{rot} \vec{H} = 0,$$

$$\oint \vec{B}\, d\vec{S} = 0 \qquad \text{или} \qquad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\text{и} \qquad \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}.$$

В стационарном, неизменяемом во времени поле, когда $\partial / \partial t = 0$ и $\delta \neq 0$

$$\oint \vec{E}\, d\vec{l} = 0 \qquad \text{или} \qquad \operatorname{rot} \vec{E} = 0,$$

$$\oint \vec{H}\, d\vec{l} = \int_S \vec{\delta}\, d\vec{S} \qquad \text{или} \qquad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta}$$

$$\text{и} \qquad \vec{\delta} = \gamma \vec{E}.$$

В этом случае электрическое и магнитное поля связаны соотношениями $\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{\delta}$ и $\vec{\delta} = \gamma\,\vec{E}$.

Для областей квазистационарного поля, в которых может протекать ток проводимости, ток смещения не учитывают $(\partial\vec{D}/\partial t \ll \gamma\,\vec{E})$ и поэтому

$$\oint \vec{E}\,d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \qquad \text{или} \qquad \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\oint \vec{H}\,d\vec{l} = \int\limits_S \vec{\delta}\,d\vec{S} \qquad \text{или} \qquad \operatorname{rot}\vec{H} = \vec{\delta}.$$

Однако для областей квазистационарного поля, в которых ток проводимости отсутствует, $(\gamma = 0)$,

$$\oint \vec{H}\,d\vec{l} = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S \vec{D}\,d\vec{S} \qquad \text{или} \qquad \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Принадлежность системы с токами или окружающей ее области пространства к квазистационарной зависит от соотношения длины l системы с током (или характерного линейного размера окружающей ее области пространства, вдоль которого распространяется электромагнитная волна) с длиной волны λ. Система квазистационарна, если $l \ll \lambda$.

Быстроизменяющиеся поля в неподвижных телах и средах описываются полной системой уравнений (а) и (б). Изменяющиеся во времени поля в движущихся телах и средах описываются видоизмененными уравнениями Максвелла (§ 22.11). При рассмотрении некоторых вопросов теории поля будем использовать также систему уравнений Максвелла в симметричной форме (§ 22.12). При изучении различных видов полей будем переходить от более простых структур к более сложным. В соответствии с этим рассмотрим сначала неизменные во времени поля, когда электрическое и магнитное поля можно изучать раздельно.

Глава девятнадцатая

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

§ 19.1. Определение электростатического поля. *Электростатическое поле* — это частный вид электромагнитного поля. Оно создается совокупностью электрических зарядов, неподвижных в пространстве по отношению к наблюдателю и неизменных во времени.

Из курса физики известно, что любое вещество состоит из элементарных заряженных частиц, окруженных электромагнитным полем.

Элементарные заряды (заряды электрона и протона) характеризуются связью с собственным и взаимодействием с внешними электрическими полями.

В любом веществе всегда имеется микроскопическая неоднородность в пространстве. Элементарные заряженные частицы, входящие в состав атомов и молекул, находятся в непрерывном хаотическом движении. Следовательно, кроме микроскопической неоднородности, в пространстве всегда имеется неодинаковость расположения элементарных зарядов в смежные моменты времени.

В теории поля осредняют микроскопические неоднородности вещества в пространстве и во времени, т. е. рассматривают процессы в макроскопическом смысле.

В заряженном теле (если общий заряд его неизменен во времени) элементарные заряды движутся хаотически. Поэтому даже в непосредственной близости от поверхности этого тела создаваемое элементарными зарядами магнитное поле практически отсутствует. Это и дает возможность рассматривать в электростатическом поле лишь один электрический компонент электромагнитного поля.

Под *зарядом* (зарядом тела) понимают скалярную величину, равную алгебраической сумме элементарных электрических зарядов в этом теле.

В дальнейшем, как правило, будем иметь дело с полем, создаваемым в однородной и изотропной средах, т. е. в таких, электрические свойства которых одинаковы для всех точек поля и не зависят от направления. В ином случае сделаны соответствующие оговорки.

Электростатическое поле обладает способностью воздействовать на помещенный в него электрический заряд с механической силой, прямо пропорциональной значению этого заряда.

В основу определения электрического поля положено механическое его проявление. Оно описывается законом Кулона.

§ 19.2. Закон Кулона. Два точечных заряда q_1 и q_2 в вакууме взаимодействуют друг с другом с силой $\vec{F}$, прямо пропорциональной произведению зарядов q_1 и q_2 и обратно пропорциональной квадрату расстояния R между ними. Эта сила направлена по линии, соединяющей точечные заряды (рис. 19.1). Заряды, имеющие одинаковые знаки, стремятся оттолкнуться друг от друга, а заряды противоположных знаков — сблизиться:

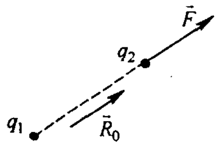

Рис. 19.1

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \vec{R}_0, \qquad (19.1)$$

где $\vec{R}_0$ — единичный вектор, направленный по линии, соединяющей заряды (см. рис. 19.1)*).

При использовании кратных и дольных единиц от единиц СИ расстояние R выражают в метрах (м), заряды — в кулонах (Кл), электрическую постоянную $\varepsilon_0 = 8{,}86 \cdot 10^{-12}$ — в фарадах на метр (Ф / м); тогда силу получают в ньютонах.

Под точечными зарядами подразумевают следующее: *линейные размеры тел, на которых расположены взаимодействующие заряды, много меньше расстояния между телами.*

§ 19.3. Напряженность и потенциал электростатического поля. Любое поле характеризуется некоторыми основными величинами. Основными величинами для электростатического поля являются напряженность $\vec{E}$ и потенциал φ.

Напряженность электростатического поля — величина векторная, определяемая в каждой точке значением и направлением; потенциал является величиной скалярной. Значение потенциала определяется в каждой точке поля некоторым числом.

Электростатическое поле определено, если известен закон изменение $\vec{E}$ или φ во всех точках этого поля.

Если в электростатическое поле поместить настолько малый (неподвижный) положительный заряд, что он своим присутствием не вызовет сколько-нибудь заметного перераспределения зарядов на телах, создающих поле, то отношение силы, действующей на заряд, к значению заряда q определяет напряженность поля в данной точке:

$$\vec{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\vec{F}}{q}. \qquad (19.1\text{a})$$

Таким образом, $\vec{E}$ — это *силовая характеристика поля, определенная при условии, что внесенный в данную точку поля заряд не исказил поля, существовавшего до внесения этого заряда.* Отсюда следует, что сила $\vec{f}$, действующая на точечный заряд q конечного значения, внесенный в поле, будет равна $\vec{f} = q\vec{E}$, а *напряженность численно равна силе, действующей на заряд, равный единице.*

Если поле создается несколькими зарядами $(q_1, q_2, q_3, \ldots)$, то его напряженность равна геометрической сумме напряженностей от каждо-

---

*) Стрелка над буквой означает вектор в пространстве.

го из зарядов в отдельности: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \ldots$, т. е. при расчете электрического поля применим метод наложения.

Рассмотрим вопрос о работе, совершаемой силами поля при перемещении заряда, и о связанных с работой понятиях потенциала и разности потенциалов.

Поместим в электрическое поле некоторый заряд q. На заряд будет действовать сила $q\vec{E}$. Пусть заряд q из точки *1* переместится в точку *2* по пути *1 3 2* (рис. 19.2). Так как направление силы $q\vec{E}$, воздействующей на заряд в каждой точке пути, может не совпадать с элементом пути $d\vec{l}$, то работа по перемещению заряда на пути $d\vec{l}$ определится скалярным произведением силы на элемент пути $q\vec{E}\,d\vec{l}$. Эту сумму элементарных работ можно записать в виде линейного интеграла $q\int\limits_1^2 \vec{E}\,d\vec{l}$.

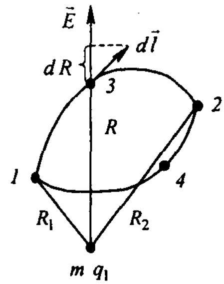

Рис. 19.2

Заряд q может быть любым. Положим его равным единице (единичный заряд). Под *разностью потенциалов* $\varphi_1 - \varphi_2$ принято понимать работу, затрачиваемую силами поля при переносе единичного заряда из начальной точки *1* в конечную точку *2*:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int\limits_1^2 \vec{E}\,d\vec{l}.$$

Если бы потенциал конечной точки пути *2* был равен нулю, то потенциал точки *1* равен (при $\varphi_2 = 0$):

$$\varphi_1 = \int\limits_1^2 \vec{E}\,d\vec{l},$$

т. е. *потенциал произвольной точки поля 1 можно определить как работу, совершаемую силами поля по переносу единичного положительного заряда из данной точки поля в точку поля, потенциал которой равен нулю.*

За точку, имеющую нулевой потенциал, можно принять любую точку поля. Если такая точка выбрана, то потенциалы всех точек поля определяются единственным образом.

Нередко принимают, что точка с нулевым потенциалом находится в бесконечности. Поэтому, особенно в курсах физики, распространено определение потенциала как работы, совершаемой силами поля при переносе единичного заряда из данной точки поля в бесконечность:

$$\varphi_1 = \int\limits_1^\infty \vec{E}\,d\vec{l}.$$

Часто считают, что точка с нулевым потенциалом находится на поверхности земли (земля в условиях электростатики есть проводящее тело, поэтому безразлично, где именно — на поверхности земли или в толще ее — находится эта точка).

Таким образом, потенциал любой точки поля зависит от того, какой точке поля придан нулевой потенциал, т. е. потенциал определяется с точностью до постоянного значения. Однако это не столь существенно, так как практически важен не потенциал какой-либо точки поля, а разность потенциалов и производная от потенциала по координатам.

При определении разности потенциалов произвольную постоянную, с точностью до которой вычисляют потенциал, вычитают, и в разность потенциалов она не входит. На значение производной от потенциала по координатам произвольная постоянная также не скажется, поскольку производная от постоянной величины равна нулю.

§ 19.4. Электрическое поле — поле потенциальное. Составим выражение для разности потенциалов в поле точечного заряда. С этой целью положим, что в точке *m* рис. 19.2 находится положительный точечный заряд q_1, создающий поле, а из точки *1* в точку *2* через промежуточную точку *3* перемещается единичный положительный заряд $q = 1$.

Обозначим: R_1 — расстояние от точки *m* до исходной точки *1*; R_2 — расстояние от точки *m* до конечной точки *2*; R — расстояние от точки *m* до произвольной точки *3* пути *1 3 2*. Направление $d\vec{l}$ в промежуточной точке *3* показано на рис. 19.2. Скалярное произведение $\vec{E}\,d\vec{l} = E\,dR$, где dR — проекция элемента пути $d\vec{l}$ на направление радиуса, соединяющего точку *m* с точкой *3*.

В соответствии с определением напряженность поля $\vec{E} = \vec{F}/q$. По закону Кулона

$$\vec{F} = \frac{q_1 q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{R}_0.$$

Так как $|\vec{R}_0| = 1$ и $q = 1$, то модуль напряженности поля в поле точечного заряда

$$E = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Подставим в формулу (19.2) вместо $\vec{E}\,d\vec{l}$ значение $q/(4\pi\varepsilon_0 R^2)\,dR$, получим

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}\,d\vec{l} = \int_1^2 E\,dR = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\int_1^2 \frac{1}{R^2}\,dR = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right). \quad (19.2)$$

Таким образом, *разность потенциалов между исходной и конечной точками пути (точками 1 и 2) зависит только от положения этих точек и не зависит от пути, по которому происходило перемещение из* *исходной точки в конечную*. Другими словами, если перемещение из точки *1* в точку *2* будет происходить по какому-то другому пути, например по пути *1 4 2*, то разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$, полученная в этом случае, будет равна разности потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ при перемещении из точки *1* в точку *2* по пути *1 3 2*.

Если поле создано совокупностью точечных зарядов, то этот вывод справедлив для поля, созданного каждым из точечных зарядов в отдельности. А так как для электрического поля в однородном и изотропном диэлектрике справедлив принцип наложения, то вывод о независимости разности потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ от пути, по которому происходило перемещение из точки *1* в точку *2*, справедлив и для электрического поля, созданного совокупностью точечных зарядов.

Если пройти по замкнутому пути *1 3 2 4 1* (см. рис. 19.2), то исходная точка пути *1* и конечная точка пути *2* совпадут, и тогда левая и правая части формулы (19.2) будут равны нулю:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 0 = \oint \vec{E}\, d\vec{l}. \tag{19.3}$$

Кружок на знаке интеграла означает, что интеграл берется по замкнутому контуру.

Соотношение (19.3) свидетельствует о том, что *в электростатическом поле линейный интеграл от напряженности электрического поля, взятый вдоль любого замкнутого пути, равен нулю.*

Физически это объясняется тем, что при движении вдоль замкнутого пути совершена определенная работа силами поля и такая же работа совершена внешними силами против сил поля. Если условиться работу, совершенную силами поля, считать положительной, а совершенную против сил поля — отрицательной, то сумма «положительных» и «отрицательных» работ равна нулю.

Равенство (19.3) можно трактовать и так: циркуляция вектора $\vec{E}$ вдоль любого замкнутого контура равна нулю. Это соотношение выражает собой основное свойство электростатического поля. Поля, для которых выполняются подобного рода соотношения, называют *потенциальными*. Потенциальными являются не только электростатические, но и гравитационные поля (поля сил тяготения между материальными телами), установившиеся температурные поля около нагретых тел и т. д.

§ 19.5. Силовые и эквипотенциальные линии. Электростатическое поле можно охарактеризовать совокупностью силовых и эквипотенциальных линий. *Силовая линия* — это мысленно проведенная в поле линия, начинающаяся на положительно заряженном теле и заканчивающаяся на отрицательно заряженном теле. Проводится она таким образом, что касательная к ней в любой ее точке дает направление напряженности поля $\vec{E}$ в этой точке. Вдоль силовой линии передвигался бы малый положительный заряд, если бы он имел возможность свободно перемещаться и не обладал инерцией. Таким образом, силовые линии имеют начало (на положительно заряженном теле) и конец (на отрицательно заряженном теле). Так как положительный и отрицательный заряды, создающие поле, не могут быть в одной и той же точке, то силовые линии электростатического поля не могут быть линиями, замкнутыми сами на себя.

В электростатическом поле можно провести эквипотенциальные (равнопотенциальные) поверхности. Под *эквипотенциальной поверхностью* понимают совокупность точек поля, имеющих один и тот же потенциал. Если мысленно рассечь электростатическое поле какой-либо секущей плоскостью, то в полученном сечении будут видны следы пересечения плоскости с эквипотенциальными поверхностями. Их называют *эквипотенциальными линиями* (или эквипотенциалями).

Из самого определения эквипотенциальной поверхности следует, что перемещение по ней не вызовет изменения потенциала. Точно так же и перемещение вдоль эквипотенциальной линии не связано с изменением потенциала.

Эквипотенциальные и силовые линии в любой точке поля пересекаются под прямым углом. На рис. 19.3, *а* изображены два заряженных тела и проведено несколько силовых и эквипотенциальных линий.

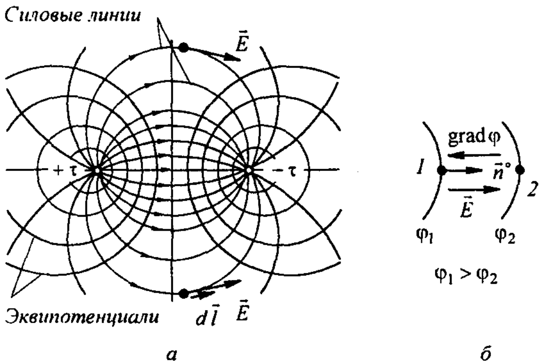

Рис. 19.3

В противоположность силовым эквипотенциальные линии электростатического поля являются замкнутыми сами на себя. Как уже говорилось, между напряженностью электрического поля $\vec{E}$ и потенциалом φ существует связь интегрального вида (19.2). Кроме нее, между $\vec{E}$ и φ существует и связь дифференциального вида.

§ 19.6. Выражение напряженности в виде градиента потенциала. Электростатическое поле, как отмечалось ранее, является полем потенциальным. Между двумя близко расположенными точками поля имеется в общем случае некоторая разность потенциалов.

Если эту разность разделить на кратчайшее расстояние между взятыми точками, то полученное значение будет характеризовать скорость изменения потенциала в направлении кратчайшего расстояния между точками. Эта скорость будет зависеть от направления, вдоль которого взяты точки.

В курсе математики пользуются понятием градиента скалярной функции. *Градиентом скалярной функции* называют скорость изменения скалярной функции, взятую в направлении ее наибольшего возрастания.

В определении градиента существенны два положения:

1) направление, в котором берутся две близлежащие точки, должно быть таким, чтобы скорость изменения была максимальна;

2) направление таково, что скалярная функция в этом направлении возрастает (не убывает).

На рис. 19.3, *б* изображены отрезки двух весьма близко расположенных эквипотенциалей. Одна из них имеет потенциал φ_1, другая — φ_2. Пусть $\varphi_1 > \varphi_2$. Тогда в соответствии с приведенным определением, градиент изобразим на рис. 19.3, *б* вектором, перпендикулярным эквипотенциальным линиям и направленным от φ_2 к φ_1 (в сторону увеличения потенциала).

Напряженность электрического поля направлена от более высокого потенциала (φ_1) к более низкому (φ_2). Если через dn обозначить расстояние по перпендикуляру (по нормали) между эквипотенциальными поверхностями, а через $d\vec{n}$ — вектор, совпадающий с направлением $\vec{E}$: $d\vec{n} = \vec{n}^\circ\, dn$ (здесь $\vec{n}^\circ$ —единичный вектор, направленный по направлению $d\vec{n}$), то на основании соотношения (19.2) можно записать выражение

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}\, d\vec{l} \approx \vec{E}\, d\vec{n} = -d\varphi,$$

где $d\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ — приращение потенциала при переходе от точки *1* к точке *2*.

Так как векторы $\vec{E}$ и $d\vec{n}$ совпадают по направлению, то скалярное произведение $\vec{E}\, d\vec{n}$ равно произведению модуля $\vec{E}$ на модуль $d\vec{n}$.

Таким образом, $E\, dn = -d\varphi$. Отсюда модуль напряженности поля $E = -d\varphi / dn$. Вектор напряженности поля $\vec{E} = E\, \vec{n}^\circ$. Поэтому

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{dn}\vec{n}^\circ. \qquad (19.4)$$

Из определения градиента следует, что

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{dn}(-\vec{n}^\circ) = \frac{-d\varphi}{dn}(-\vec{n}^\circ). \qquad (19.5)$$

Сопоставляя (19.4) и (19.5), замечаем, что

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi. \qquad (19.6)$$

Соотношение (19.6) можно истолковать следующим образом: напряженность в какой-либо точке поля равна скорости изменения потенциала в этой точке, взятой с обратным знаком. Знак минус означает, что направление $\vec{E}$ и направление $\operatorname{grad}\varphi$ противоположны (см. рис. 19.3, *б*).

Нормаль $d\vec{n}$ в общем случае может быть расположена так, что не совпадет с направлением какой-либо координатной оси, и поэтому градиент потенциала в общем случае можно представить в виде суммы трех проекций по координатным осям. Например, в декартовой системе координат

$$\operatorname{grad}\varphi = \vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \qquad (19.7)$$

Здесь $\vec{i}\,\partial\varphi/\partial x$ — скорость изменения φ в направлении оси x; $\partial\varphi/\partial x$ — числовое значение (модуль) скорости (скорость — величина векторная); $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные орты соответственно по осям x, y, z декартовой системы.

Вектор напряженности $\vec{E} = \vec{i}\,E_x + \vec{j}\,E_y + \vec{k}\,E_z$. Таким образом,

$$\vec{i}\,E_x + \vec{j}\,E_y + \vec{k}\,E_z = -\left(\vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right).$$

Два вектора равны только тогда, когда равны друг другу их соответствующие проекции. Следовательно,

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}; \qquad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}; \qquad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \qquad (19.8)$$

Соотношения (19.8) следует понимать так: проекция напряженности поля на ось x равна проекции скорости изменения потенциала вдоль оси x, взятой с обратным знаком, и т. д.

§ 19.7. Дифференциальный оператор Гамильтона (оператор набла). Для сокращения записи различных операций над скалярными и векторными величинами употребляют оператор Гамильтона (оператор набла). Под дифференциальным оператором Гамильтона понимают сумму частных производных по трем координатным осям, умноженных на соответствующие единичные векторы (орты). В декартовой системе координат его записывают так:

$$\nabla\varphi = \vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Он сочетает в себе векторные и дифференцирующие свойства и может быть применен к скалярным и векторным функциям. Ту функцию, действие над которой хотят произвести (дифференцирование ее по координатам, или «пространственное» дифференцирование), пишут справа от оператора *набла*.

Применим оператор ∇ к потенциалу φ. С этой целью запишем

$$\nabla\varphi = \left(\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi = \vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Если сравнить последнее выражение с (19.7), то можно заметить, что правые части у них одинаковы. Следовательно, равны и левые: $\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi$, т. е. запись $\nabla\varphi$ эквивалентна записи $\operatorname{grad}\varphi$, а приписывание слева к какой-либо скалярной функции (в рассматриваемом случае к φ) оператора ∇ означает взятие градиента от этой скалярной функции.

§ 19.8. Выражение градиента потенциала в цилиндрической и сферической системах координат. В цилиндрической системе (обозначения см. на рис. 19.4, *а*)

$$\operatorname{grad}\varphi = \vec{r}^{\circ}\,\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \vec{\alpha}^{\circ}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \vec{z}^{\circ}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{19.9}$$

В сферической системе (обозначения см. на рис. 19.4, *б*)

$$\operatorname{grad}\varphi = \vec{R}^{\circ}\,\frac{\partial\varphi}{\partial R} + \vec{\theta}^{\circ}\,\frac{1}{R}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \vec{\alpha}^{\circ}\,\frac{1}{R\sin\theta}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}. \tag{19.10}$$

§ 19.9. Поток вектора через элемент поверхности и поток вектора через поверхность. Пусть в векторном поле (например, в поле вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$) есть некоторый элемент поверхности, площадь которого с одной стороны численно равна dS. Выберем положительное направление нормали (перпендикуляра) к элементу поверхности. Значение вектора $d\vec{S}$ в некотором масштабе на рис. 19.5

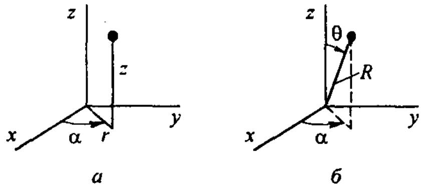

Рис. 19.4

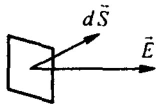

Рис. 19.5

равно площади элемента поверхности, а его направление совпадает с положительным направлением нормали. Будем полагать, что площадь элемента достаточно мала, чтобы в пределах этого элемента вектор $\vec{E}$ можно было считать одним и тем же во всех точках.

Если бы вектор $\vec{E}$ был перпендикулярен $d\vec{S}$, то $\vec{E}$ не пронизывал бы элемент поверхности; если $\vec{E}$ направлен по $d\vec{S}$, то через данный элемент поверхности будет проходить максимальный поток вектора $\vec{E}$. В общем случае поток вектора $\vec{E}$ через элемент поверхности определится скалярным произведением $\vec{E}\,d\vec{S}$.

Поток вектора через элемент поверхности $\vec{E}\,d\vec{S}$ является скаляром алгебраического характера. Поток вектора может оказаться положительным или отрицательным. Положительное значение потока $\vec{E}\,d\vec{S}$ означает,

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
РАДИОТЕХНИКИ ЭЛЕКТРОНИКИ И АВТОМАТИКИ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ СБОРНИК ЗАДАЧ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ БАКАЛАВРОВ

Под редакцией **Л. А. Бессонова**

5-е издание, исправленное и дополненное

Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов энергетических и приборостроительных специальностей вузов

Книга доступна в электронной библиотечной системе biblio-online.ru

Москва ▪ Юрайт ▪ 2014

УДК 621.3.01(075.8)
ББК 31.21я73
Т33

***Авторы*:**
**Бессонов Л. А., Демидова И. Г., Заруди М. Е.,
Каменская В. П., Миленина С. А., Расовская С. Э.**

***Рецензенты*:**
Герасимов В. Г. — доктор технических наук, профессор Московского энергетического института.

Т33 **Теоретические основы электротехники. Сборник задач** : учеб. пособие для бакалавров / Л. А. Бессонов [и др.]; под ред. Л. А. Бессонова. — 5-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2014. — 528 с. — Серия : Бакалавр. Углубленный курс.

ISBN 978-5-9916-3438-0

В сборнике приведены задачи по всем разделам курса ТОЭ, даны решения некоторых из них. Помимо традиционных представлены задачи по следующим темам: сверхпроводимость, электрические фильтры, установившиеся режимы и переходные процессы в линиях с распределенными параметрами, а также включены задачи на матрично-топологические методы расчета, метод интегральных уравнений для расчета электромагнитных полей.

Соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования третьего поколения.

Для студентов и преподавателей высших учебных заведений технического профиля.

УДК 621.3.01(075.8)
ББК 31.21я73

ISBN 978-5-9916-3438-0

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое вниманию читателя четвертое издание «Сборника задач по теоретическим основам электротехники» соответствует программе курса ТОЭ, утвержденной Министерством образования Российской Федерации.

По теории линейных и нелинейных электрических цепей в задачнике рассмотрены следующие группы вопросов: элементная база электрических цепей, свойства и методы расчета цепей при постоянных, синусоидальных, периодических несинусоидальных процессах, матрично-топологическое направление теории цепей, четырехполюсники взаимные и невзаимные, цепи с операционными усилителями, имитированные элементы, *k, m, RC*- и активные *RC*-фильтры, расчет переходных процессов классическим, операторным методами, с помощью интеграла Дюамеля, метод пространства состояний, преобразования Фурье и спектральный метод, синтез двух и четырехполюсников, цепи с распределенными параметрами в установившихся и переходных процессах, основы теории сигналов, корреляционные функции, направленные и ненаправленные графы, цепи с переменными во времени параметрами, устойчивость режимов работы, автоколебания, некоторые малоизвестные физические явления в нелинейных цепях и другие вопросы.

По теории электромагнитного поля рассмотрены: методы расчета электрических, магнитных и электромагнитных полей при постоянных и синусоидальных во времени процессах в диэлектрике, проводящих и полупроводящих средах, запаздывающие потенциалы, излучение электромагнитной энергии, поля в направляющих системах, объемные резонаторы, основные положения магнитной гидродинамики, движение заряженных частиц, сверхпроводящие среды в электромагнитном поле, метод интегральных уравнений, метод конформных преобразований.

Структура задачника следующая: сначала представлен раздел условий задач, затем раздел решений задач, снабженных в условиях буквой р, и в заключение раздел ответов для задач без буквы р. Всего задач 1000. Из них задач с решениями и подробными пояснениями 330.

Рисунки в разделе условий имеют двойную нумерацию, например 10.20. Цифры до точки указывают номер главы, после — порядковый номер внутри главы. Рисунки в разделе решений и в разделе ответов имеют тройную нумерацию. В разделе решений с дополнительной буквой Р, например Р.10.20, в разделе ответов с дополнительной буквой О, например О.10.15.

Для облегчения пользования книгой, задачи каждой главы подразделены на группы с близкой тематикой по 4—7 задач в каждой.

Работа по написанию сборника задач распределялась между авторами следующим образом: Л.А. Бессонов — гл. 1, 10, 15, 18, руководство всей работой и редактирование; И.Г. Демидова — гл. 19—26; М.Е. Заруди — гл. 8, 9, 16, 27, 28; В.П. Каменская — гл. 2, 3, 4, 14; С.А. Миленина — гл. 5, 11, 12; С.Э. Расовская — гл. 7, 13 ,17; С.Э. Расовская и И.Г. Демидова — гл. 6.

Авторы выражают благодарность рецензенту заслуженному деятелю науки и техники,профессору МЭИ (ТУ) Герасимову В.Г. за ценные замечания, учтенные при переиздании.

Авторы

Глава первая

Линейные электрические цепи постоянного тока

А. Законы Ома и Кирхгофа. Источники ЭДС и тока. Разность потенциалов

1.1р. На рис. 1.1,*а* изображен остов некоторой схемы. Токи I_1 и I_2 известны. Найти ток I_3.

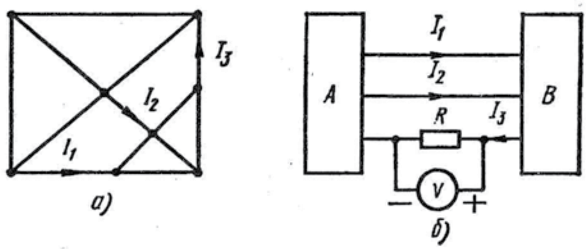

Рис. 1.1

1.2. Две части A и B некоторой электрической цепи (рис. 1.1, *б*) соединены тремя проводами. Токи $I_1 = 0{,}1$А и $I_2 = 0{,}2$А, резистор имеет сопротивление $R = 100$ Ом. Определить показание вольтметра, имеющего внутреннее сопротивление 1000 Ом.

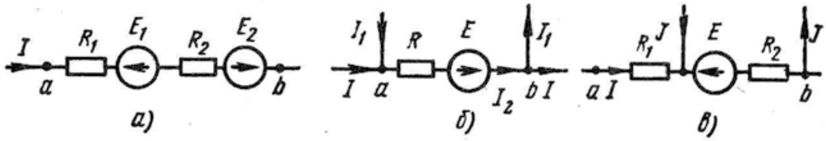

Рис. 1.2

1.3. На рис. 1.2, *а* изображен участок некоторой цепи. Известны потенциалы $\varphi_a = 5$ В и $\varphi_b = 40$ В точек a и b. Резисторы имеют сопротивления $R_1 = 8$ Ом и $R_2 = 2$ Ом, ЭДС $E_1 = 15$ В и $E_2 = 25$ В. Найти ток I.

1.4. Найти значения токов I_2 и I для участка цепи рис. 1.2, *б*. Ток $I_1 = 10$ мА, резистор имеет сопротивление $R = 2$ кОм, ЭДС

$E = 15$ В, напряжение $U_{ab} = 9$ В. Ветвь, состоящую из резистора сопротивлением R и источника **ЭДС** E, заменить источником тока и резистором.

1.5. Для участка цепи (рис. 1.2, *в*) известна разность потенциалов $U_{ab} = 120$ В. Найти ток J, если $I = 20$ мА; $R_1 = 1$ кОм; $R_2 = 2$ кОм; $E = 18$ В.

1.6р. В схеме рис. 1.3, *а* определить потенциал точки O и токи I_1, I_2, I_3, если $E_1 = 10$ В; $R_1 = 2$ кОм; $E_2 = 25$ В; $R_2 = 8$ кОм, $R_3 = 12$ кОм; $\varphi_1 = -5$ В; $\varphi_2 = 16$ В; $\varphi_3 = 28$ В.

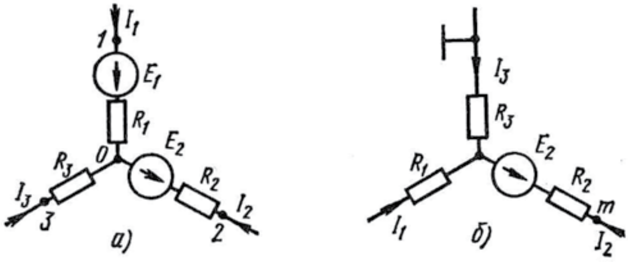

Рис. 1.3

1.7. В схеме рис. 1.3, *б* определить ток I_2 и потенциал точки m. Известно, что $I_1 = 20$ мА; $I_3 = -10$ мА; $R_2 = 5$ кОм; $\mathbf{E_2 = 15}$ **В**; $R_3 = 10$ кОм. Осуществить эквивалентную замену источника **ЭДС** на источник тока.

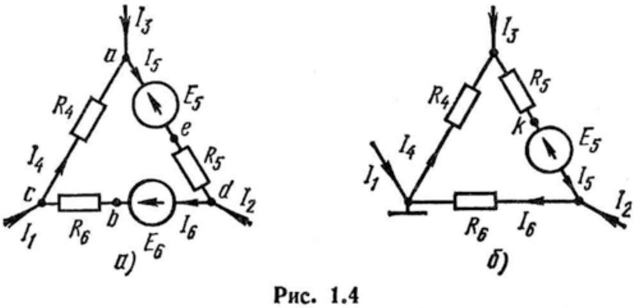

Рис. 1.4

1.8р. В схеме рис. 1.4, *а* заданы токи I_1 и I_3, сопротивления резисторов и **ЭДС**. Определить токи I_4, I_5, I_6, а также разность потенциалов U_{ab} между точками a и b, если $I_1 = 10$ мА; $I_3 = -20$ мА; $R_4 = 5$ кОм; $E_5 = 20$ В; $R_5 = 3$ кОм; $E_6 = 40$ В, $R_6 = 2$ кОм.

1.9. В схеме рис. 1.4, *б* определить потенциал точки k, если $I_1 = 5$ мА; $I_3 = -20$ мА; $R_4 = 5$ кОм; $R_5 = 3$ кОм; $E_5 = 20$ В, $R_6 = 2$ кОм.

1.10. В схеме рис. 1.5, *а* определить **ЭДС** E, если показание вольтметра равно нулю. Ток источника тока $J = 1$ мА; $R = 1$ кОм.

1.11. Составить уравнения по законам Кирхгофа и определить токи во всех ветвях схемы рис. 1.5, *б*, если $J_1 = 1$ мА; $J_2 = 2$ мА; $J_3 = 3$ мА; $R_4 = 4$ кОм; $R_5 = 5$ кОм; $R_6 = 6$ кОм; $R_7 = 7$ кОм; $E_4 = 27$ В.

1.12. Схему рис. 1.5, *б* преобразовать так, чтобы она не содержала источников тока J_1 и J_2. Для полученной схемы определить токи и сравнить их с токами в непреобразованной схеме.

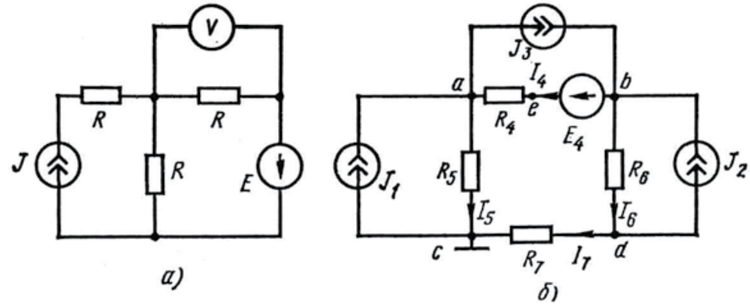

Рис. 1.5

1.13. Сколько уравнений следует составить для схемы рис. 1.6 по первому и второму законам Кирхгофа?

1.14р. В схеме рис. 1.7 определить токи во всех ветвях и напряжение U_{nk} между точками *n* и *k*. Значение сопротивления

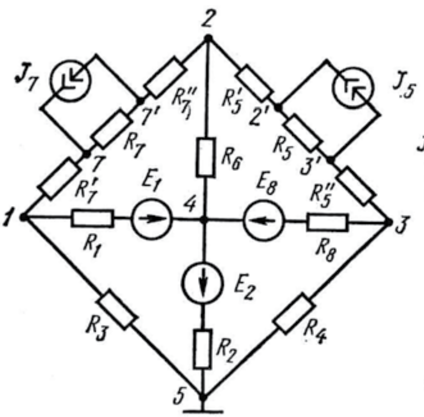

Рис. 1.6

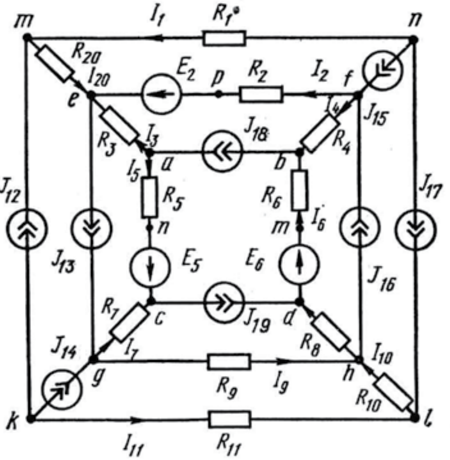

Рис. 1.7

каждого резистора (R_1—R_{11}) дано в омах и равно номеру соответствующего резистора, например $R_7 = 7$ Ом; $R_{20} = 20$ Ом. Токи J_{12}—J_{19} даны в амперах, причем значения каждого равно номеру источника тока, например $J_{15} = 15$ А. ЭДС $E_2 = -29$ В; $E_5 = 10$ В; $E_6 = 10$ В.

Б. Потенциальная диаграмма. Линейные соотношения

1.15р. Построить потенциальную диаграмму для схемы рис. 1.4, *а*. Параметры схемы даны в условии задачи 1.8р.

1.16. Построить потенциальную диаграмму для контура *abdc* схемы рис. 1.5, *б* по данным задачи 1.11.

1.17. На рис. 1.8, *а* изображен остов некоторой схемы. Буквами обозначены точки соединения отдельных элементов схемы. На рис. 1.8, *б*, *в* показаны потенциальные диаграммы вдоль контура

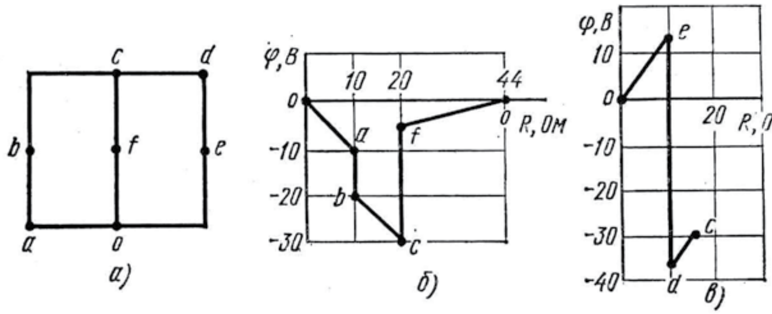

Рис. 1.8

oabcfo и вдоль ветви *oedc* соответственно. Определить значение и направление токов в ветвях и характер элементов, включенных на различных участках схемы.

1.18р. На рис. 1.9, *б* изображена потенциальная диаграмма вдоль контура *oabcdefgo* скелетной схемы рис. 1.9, *а*. Известно, что в ветвях *af* и *cf* включены резисторы. Определить значение

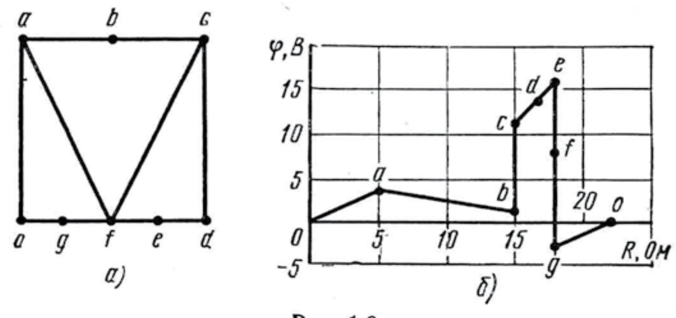

Рис. 1.9

и направление тока в каждой ветви, а также значения элементов схемы на всех участках. Потенциалы точек схемы: $\varphi_a = 3{,}175$ В; $\varphi_b = 0{,}975$ В; $\varphi_c = 10{,}975$ В; $\varphi_e = 15{,}53$ В; $\varphi_f = 7{,}53$ В; $\varphi_g = -2{,}47$ В.

1.19р. В схеме рис. 1.10, *а* сопротивление резистора R_2 изменяется от 0 до ∞. Записать зависимость тока I_1 от тока I_2 для двух случаев: 1) $E_1 = 0$; 2) $E_1 = 10$ В. Ток источника тока $J = 1$ А; $R_1 = 10$ Ом; $R = 1$ Ом.

1.20. На рис. 1.10, *б* изображена скрещенная мостовая схема. Ток источника тока $J = 1$ А; $R_1 = 1$ Ом; $R_2 = 2$ Ом; $R_3 = 3$ Ом; $R_4 = 4$ Ом. Сопротивление резистора $R_н$ изменяется от 0 до ∞. Записать линейную зависимость между токами I_1 и I_4 для двух случаев: 1) схема рис. 1.10, *б* питается от источника тока; 2) источник тока заменен на источник ЭДС $E=1$ В.

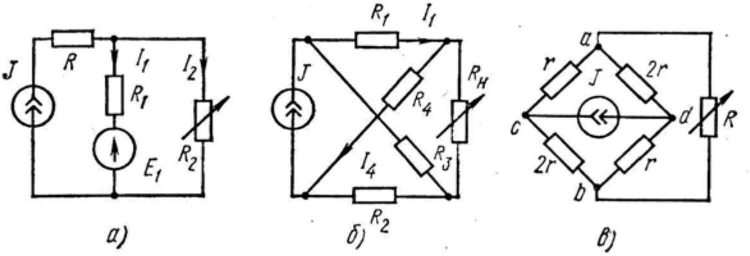

Рис. 1.10

1.21. В одной диагонали мостовой схемы рис. 1.10, *в* находится источник тока J, в другой — резистор, сопротивление которого R изменяется от 0 до ∞. Записать линейное соотношение между напряжениями на диагоналях U_{cd} и U_{ab}.

В. Входные сопротивления. Преобразование треугольника в звезду и звезды в треугольник

1.22р. Определить входное сопротивление R_{ab} схемы рис. 1.11, *а* относительно точек a и b, если $R_1=2{,}26$ Ом; $R_2=3$ Ом; $R_3=2{,}17$ Ом; $R_4=4$ Ом; $R_5=3$ Ом; $R_6=2$ Ом.

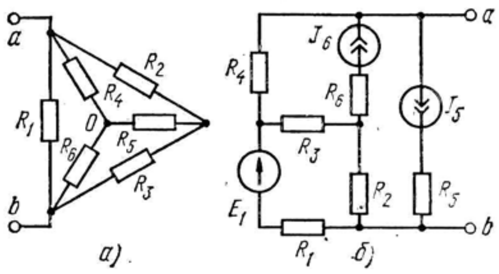

Рис. 1.11

1.23. Решая задачу 1.22р (рис. 1.11, *а*) по определению входного сопротивления между точками a и b, студент преобразовал треугольник, состоящий из резисторов R_1, R_2, R_3, в звезду и точку O звезды, состоящей из резисторов R_4, R_5, R_6, соединил с точкой O' вновь полученной звезды. Ответ он получил неверный. В чем заключается его ошибка?

1.24. Найти входное сопротивление R_{ab} схемы рис. 1.11, *б* относительно точек a и b, если J_5 и J_6 — источники тока.

1.25. В схеме рис. 1.11, *б* источник тока J_6 заменен на источник э.д.с. Резисторы имеют сопротивления $R_1=1$ Ом; $R_2=2$ Ом; $R_3=2$ Ом; $R_4=0{,}6$ Ом; $R_6=0{,}2$ Ом. Определить входное сопротивление между точками a и b.

1.26. В схеме рис. 1.12, *а* сопротивления резисторов указаны в омах. Определить входное сопротивление схемы относительно точек *a* и *b*.

1.27. В схеме рис. 1.12, *б* сопротивления всех резисторов, кроме двух, указаны в омах. Сопротивления двух резисторов обозначены x. Чему равно сопротивление x, если входное сопротивление схемы относительно точек *a* и *b* $R_{ab} = 1{,}5$ Ом?

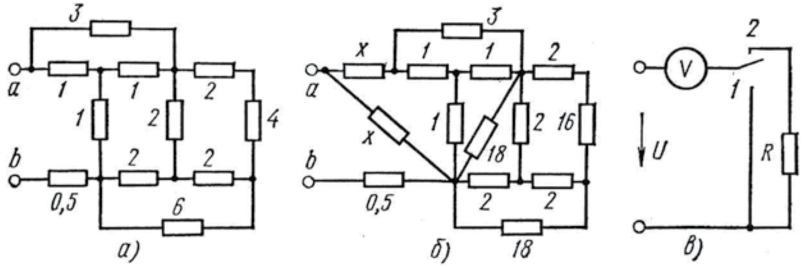

Рис. 1.12

1.28р. Измерение сопротивления R резистора было произведено с помощью схемы рис. 1.12, *в*. В этой схеме переключатель может находиться либо в первом, либо во втором положении. Внутреннее сопротивление вольтметра $R_{вн} = 3$ кОм. Было проведено два измерения при неизменном входном напряжении U. Когда переключатель находился в положении *1*, вольтметр показал 100 В. При установке переключателя в положение *2* вольтметр показал 90 В. Найти сопротивление R резистора.

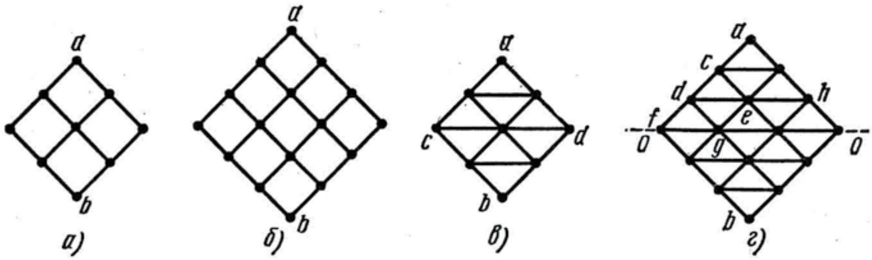

Рис. 1.13

1.29. На рис. 1.13, *а—г* изображены четыре схемы, составленные из проволок. В местах соединений проволоки спаяны.

Определить: а) входное сопротивление между точками *a* и *b* схем рис. 1.13, *а*, *б*, полагая сопротивление каждой проволоки равным R; б) входное сопротивление между точками *a* и *b*, *c* и *d* схемы рис. 1.13, *в*, считая сопротивление каждой проволоки равным R; в) потенциалы точек *c*, *d*, *e*, *f*, *g* схемы рис. 1.13, *г*, полагая потенциал точки *a* равным 18 В, а потенциал точки *b* равным — 18 В. Считать сопротивление каждой проволоки, кроме проволок, находящихся на линии $O—O$, равным 3 Ом, а расположенных на линии $O—O$ равным $0{,}5R = 1{,}5$ Ом. Во всех ли горизонтальных перемычках схемы рис. 1.13, *г* будет отсутствовать ток?

1.30р. На рис. 1.14, *а* изображен проволочный куб, каждое ребро которого имеет сопротивление $R = 1$ Ом. Найти сопротивление между точками a и b, a и c, d и c.

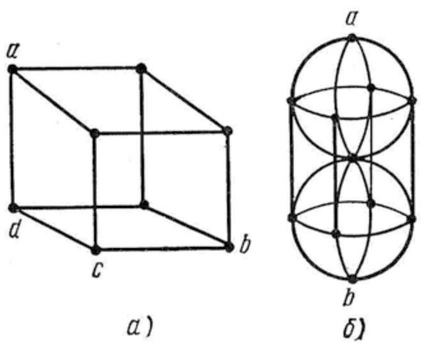

Рис. 1.14

1.31. Шесть проволочных колец диаметром d, сечением S и удельным сопротивлением ρ и четыре проволоки длиной d того же сечения и из того же материала спаяны, как показано на рис. 1.14, *б*. Определить сопротивление между точками a и b проволочной фигуры.

Г. Входные и взаимные проводимости ветвей. Теорема взаимности. Принцип наложения. Теорема вариаций

1.32р. Для схемы рис. 1.15, *а* найти входные и взаимные проводимости. Значения сопротивлений резисторов в омах указаны на схеме.

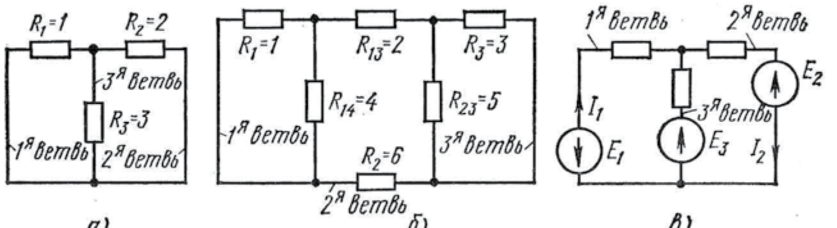

Рис. 1.15

1.33. В схеме рис. 1.15, *б* определить входные и взаимные проводимости g_{11}, g_{12}, g_{13}, g_{22}, g_{23}, g_{33}. Значения сопротивлений резисторов в омах указаны на схеме.

1.34р. Известны входные и взаимные проводимости ветвей схемы рис. 1.15, *в*: $g_{11} = 0{,}454$ См; $g_{12} = 0{,}273$ См; $g_{13} = 0{,}182$ См; $g_{22} = 0{,}3635$ См; $g_{23} = 0{,}091$ См. Найти ток I_2, если $E_1 = 10$ мВ; $E_2 = 6$ мВ; $E_3 = 5$ мВ.

1.35. В схеме рис. 1.15, *в* ток $I_1 = 4$ мА. Значения ЭДС E_2 и E_3 и проводимостей даны в условии задачи 1.34р. Определить ЭДС E_1.

1.36. 1. На рис. 1.16, *а* буквой П обозначена пассивная часть некоторой схемы. Токи в двух ветвях схемы обозначены I_1 и I_2.

Каждый из переключателей $П_1$ и $П_2$ может находиться в одном из трех положений. В табл. 1.1 приведены данные двух режимов работы схемы.

Полагая $E_1'' = 3E_1'$ и $E_2'' = 4E_2'$, найти токи I_1 и I_2 в режиме, когда переключатели $П_1$ и $П_2$ находятся в положении *3*.

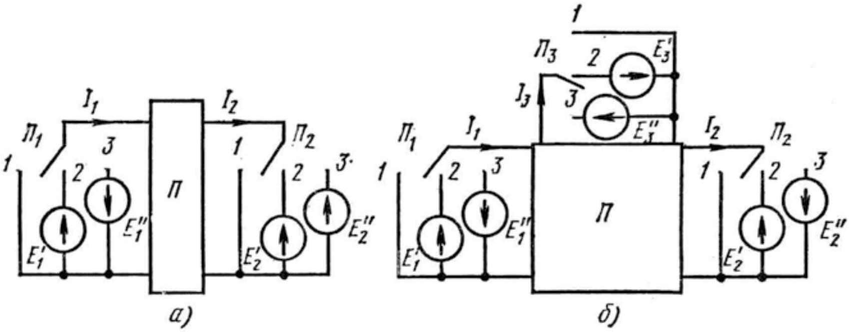

Рис. 1.16

2. Токи в трех ветвях схемы рис. 1.16, *б* обозначены I_1, I_2 и I_3. Известны токи в трех режимах работы схемы (табл. 1.2).

Таблица 1.1

Режим	Положение $П_1$	Положение $П_2$	I_1, мА	I_2, мА
1	2	1	$I_1' = 80$	$I_2' = 40$
2	1	2	$I_1'' = -80$	$I_2'' = -96$

Таблица 1.2

Режим	Положение $П_1$	Положение $П_2$	Положение $П_3$	I_1, мА	I_2, мА	I_3, мА
1	2	1	1	$I_1' = 200$	$I_2' = 60$	$I_3' = 80$
2	1	2	1	$I_1'' = -60$	$I_2'' = -120$	$I_3'' = -40$
3	1	1	2	$I_1''' = 120$	$I_2''' = 60$	$I_3''' = 200$

Найти токи в четвертом режиме, когда все переключатели находятся в положении *3*, если $E_1'' = 2E_1'$; $E_2'' = 3E_2'$; $E_3'' = 4E_3'$.

1.37. На рис 1.17, *а* изображен активный четырехполюсник *А* с двумя выделенными ветвями *1* и *2*. В исходном режиме ток $I_1 = 7$А. В ветвь *1* дополнительно включили резистор сопротивлением $\Delta R = 1$ Ом. При этом ток ветви *1* стал 5,516 А, не изменив

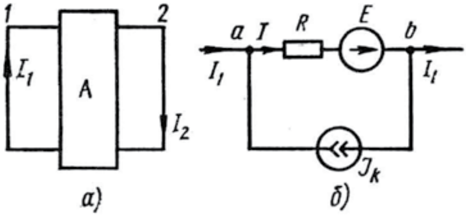

Рис. 1.17

направления. Определить входную проводимость первой ветви и изменение тока ΔI_2 второй ветви, полагая, что взаимная проводимость между первой и второй ветвями $g_{12} = 0{,}1153$ См.

Д. Метод контурных токов. Метод узловых потенциалов. Метод двух узлов. Баланс мощностей. Замена нескольких параллельных ветвей эквивалентной

1.38р. Определить мощность, доставляемую источником тока, в схеме рис. 1.17, *б* при $J = J_k = 1$ А; $I_1 = 0{,}3$ А; $R = 10$ Ом; $E = 3$ В.

1.39. Найти токи в ветвях схемы рис. 1.18, *а* методом контурных токов и методом двух узлов. Сравнить результаты. Проверить выполнение баланса мощности, если $J = 1$ А; $R_1 = 5$ Ом; $R_2 = 8$ Ом; $R_3 = 2$ Ом; $E_2 = 16$ В; $E_3 = 4$ В.

1.40. Вычислить токи в ветвях схемы рис. 1.18, *б* методом узловых потенциалов и методом контурных токов. Составить уравнение баланса мощности. Исходные

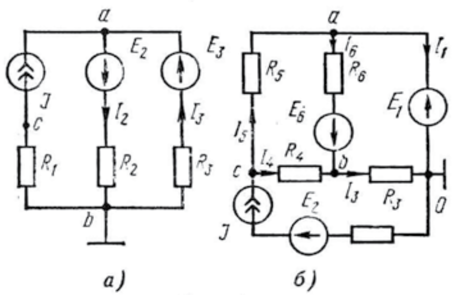

Рис. 1.18

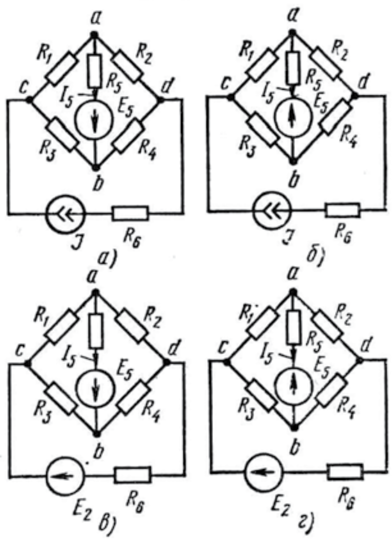

Рис. 1.19

данные: $E_1 = 25$ В; $E_2 = 10$ В; $E_6 = 20$ В; $J = 2$ А; $R_2 = 10$ Ом; $R_3 = 20$ Ом; $R_4 = 10$ Ом; $R_5 = 8$ Ом; $R_6 = 5$ Ом.

1.41. В мостовых схемах рис. 1.19, *а—г* определить токи в ветвях методом контурных токов и методом узловых потенциалов. В схемах рис. 1.19, *а*, *б* в диагонали *cd* находится источник тока с $J = 1$ А, в схемах рис. 1.19, *в*, *г* — источник ЭДС с $E_2 = 5{,}1$ В.

Схемы рис. 1.19, *а* и *б*, *в* и *г* отличаются полярностью ЭДС $E_5 = 1$ В. Исходные данные: $R_1 = 1$ Ом; $R_2 = 2$ Ом; $R_3 = 3$ Ом; $R_4 = 4$ Ом; $R_5 = 0{,}6$ Ом; $R_6 = 3$ Ом.

1.42р. Сколько уравнений следовало бы составить для расчета токов в схеме рис. 1.7, если воспользоваться: а) методом узловых потенциалов; б) контурных токов?

1.43. В схеме рис. 1.18, *а* заменить одной эквивалентной ветвью: а) ветви *1* и *2*; б) ветви *2* и *3*. Номер ветви соответствует номеру резистора.

Е. Активный двухполюсник. Метод эквивалентного генератора

1.44. Опытным путем был получен участок зависимости тока I на входе некоторого активного двухполюсника в функции от напряжения U на его зажимах (рис. 1.20, *а*). Рассчитать параметры

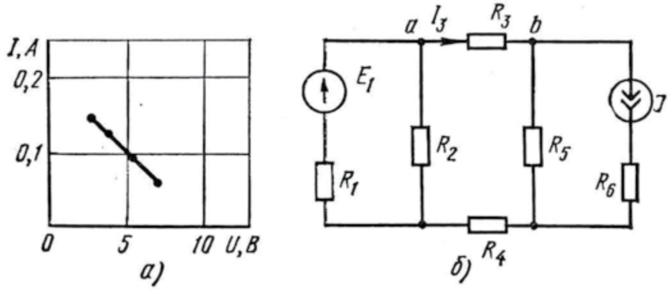

Рис. 1.20

схемы замещения этого двухполюсника: а) с источником ЭДС; б) с источником тока.

1.45. Определить ток I_3 в схеме рис. 1.20, *б* методом эквивалентного генератора, если $E_1 = 20$ В; $J = 1$ А; $R_1 = 10$ Ом; $R_2 = 10$ Ом; $R_3 = 5$ Ом; $R_4 = 15$ Ом; $R_5 = 5$ Ом; $R_6 = 5$ Ом.

1.46. Методом эквивалентного генератора определить ток I_5 в диагоналях *ab* мостовых схем рис. 1.19, *а—г*. Значения параметров даны в условии задачи 1.41.

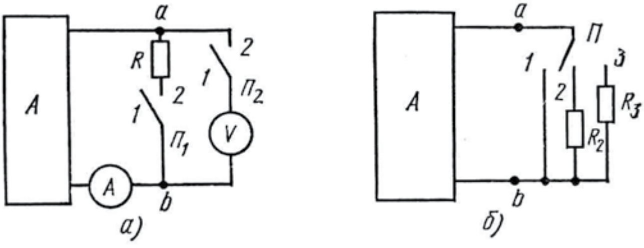

Рис. 1.21

1.47р. В схеме рис. 1.21, *а* с помощью вольтметра с внутренним сопротивлением R_V и амперметра с внутренним сопротивле-